

**Strategien für Aufbauspiele
mit
Mosaik-Polyominos**

Jens-P. Bode

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig
genehmigte Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

5. Dezember 2000

Ich danke Herrn Professor Harborth für seine
intensive Betreuung und wertvollen Anregungen.

Referent: Prof. Dr. H. Harborth
Korreferent: Prof. Dr. A. Kemnitz
Eingereicht: 27. Oktober 2000
Prüfung: 5. Dezember 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Spielbretter und Polyominos	5
2.1	Mosaik-Graphen	5
2.2	Polyominos	6
2.3	Computereinsatz	7
3	Aufbau- und Verhinderungsstrategien	8
3.1	Aufbaustrategien	8
3.2	Verhinderungsstrategien	9
3.3	Computereinsatz	10
4	Platonische Körper	12
4.1	Tetraeder (3,3,3)	13
4.2	Hexaeder (4,4,4)	13
4.3	Oktaeder (3,3,3,3)	13
4.4	Dodekaeder (5,5,5)	14
4.5	Ikosaeder (3,3,3,3,3)	14
5	Archimedische Körper	15
5.1	Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner	15
5.2	Abgestumpftes Tetraeder (3,6,6)	16
5.3	Kuboktaeder (3,4,3,4), abgestumpfter Würfel (3,8,8) und abgestumpftes Oktaeder (4,6,6)	18
5.4	Rhombenkuboktaeder (3,4,4,4) und abgestumpftes Kuboktaeder (4,6,8)	32
5.5	Ikosidodekaeder (3,5,3,5), abgestumpftes Dodekaeder (3,10,10) und abgestumpftes Ikosaeder (5,6,6)	34
5.6	Abgeschrägter Würfel (3,3,3,3,4)	36
5.7	Rhombenikosidodekaeder (3,4,5,4) und abgestumpftes Ikosidodekaeder (4,6,10)	38
5.8	Abgeschrägtes Dodekaeder (3,3,3,3,5)	40
5.9	Archimedische Prismen (4,4, n)	42
5.10	Archimedische Antiprismen (3,3,3, n)	48
5.11	Pseudo-Rhombenkuboktaeder	55
6	Euklidische Parkettierungen	56
6.1	Dreieck-Gitter (3,3,3,3,3,3)	56
6.2	Quadrat-Gitter (4,4,4,4)	57
6.3	Sechseck-Gitter (6,6,6)	58

7	Archimedische Parkettierungen	66
7.1	Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner	66
7.2	Eckenfolge (3,3,3,3,6)	68
7.3	Eckenfolge (3,3,3,4,4)	72
7.4	Eckenfolge (3,3,4,3,4)	77
7.5	Eckenfolge (3,4,6,4)	81
7.6	Eckenfolge (3,6,3,6)	82
7.7	Eckenfolge (3,12,12)	83
7.8	Eckenfolge (4,6,12)	84
7.9	Eckenfolge (4,8,8)	85
8	Hyperbolische Mosaike	86
8.1	$(3,q)$ -Mosaik-Graphen	86
9	Zusammenfassung	95
	Literatur	96

1 Einleitung

Dieser Arbeit liegt ein Spiel zu Grunde, das durch Frank Harary eingeführt und durch Artikel von Martin Gardner 1979 einer breiten Öffentlichkeit bekannt gemacht wurde ([5, 6]). Dieses Spiel soll in dieser Arbeit A-B-Aufbauspiel genannt werden und ist ein Brettspiel für zwei Personen. Vor Beginn des Spiels einigen sich die beiden Spieler auf ein Polyomino. Dies ist eine endliche, nichtleere, einfachzusammenhängende, echte Teilmenge der Felder des Spielbrettes. Auf das anfänglich leere Spielbrett setzen nun die beiden Spieler abwechselnd einen Spielstein ihrer Farbe auf ein noch unbesetztes Feld. Der Spieler, der den ersten Zug macht, wird als Spieler A bezeichnet, der andere heißt Spieler B. Derjenige Spieler, der als erster eine Menge von Feldern in der Form des vorher ausgewählten Polyominos (also unabhängig von Translation, Rotation und Reflektion) mit Steinen seiner Farbe besetzt, gewinnt das Spiel. Gibt es für Spieler A eine Strategie, die immer zum Sieg führt, so wird das Polyomino Gewinner genannt, andernfalls heißt es Verlierer.

Es ist einfach zu sehen, daß ein A-B-Aufbauspiel bei optimalem Spiel beider Spieler immer mit einem Sieg des Spielers A oder mit einem Unentschieden endet. Hätte nämlich Spieler B eine Strategie, die immer zum Sieg führen würde, so könnte Spieler A mit derselben Strategie und unter Ausnutzung der Tatsache, daß er den ersten Zug macht, ebenfalls immer gewinnen. Diese Überlegungen führen zu einer Variante, die hier A-Aufbauspiel genannt werden soll. Sie unterscheidet sich vom A-B-Aufbauspiel insoweit, daß nur noch Spieler A dadurch gewinnen kann, daß er selbst das Polyomino aufbaut. Das einzige Ziel des Spielers B besteht darin, Spieler A vom Sieg abzuhalten. Dabei spielt es also keine Rolle, ob Spieler B selbst das Polyomino aufbaut. Hat Spieler A beim A-B-Aufbauspiel eine Aufbaustrategie für ein bestimmtes Polyomino, so führt dieselbe Strategie auch beim entsprechenden A-Aufbauspiel immer zum Erfolg. Ist ein Polyomino also ein Gewinner beim A-B-Aufbauspiel, so ist es auch ein Gewinner beim A-Aufbauspiel. Ein Verlierer beim A-Aufbauspiel ist also immer auch ein Verlierer beim A-B-Aufbauspiel. Es ist bisher kein Beispiel bekannt, bei dem ein Polyomino auf einem unendlichen Brett ein Gewinner beim A-Aufbauspiel und ein Verlierer beim entsprechenden A-B-Aufbauspiel ist.

In der bisherigen Literatur wird zwischen dem A-B-Aufbauspiel und dem A-Aufbauspiel nicht immer klar unterschieden. Naheliegenderweise wird das A-B-Aufbauspiel definiert, die Nachweise der Gewinner und Verlierer lassen sich jedoch für die Version des A-Aufbauspiels leichter durchführen.

Da in dieser Arbeit vorrangig das A-Aufbauspiel betrachtet wird, soll diese Version im folgenden einfach als Aufbauspiel bezeichnet werden.

Trotz intensiver Bemühungen ([10, 15, 17, 18]) ist die Frage, welche Polyominos zur Menge der Gewinner gehören, für die Polyominos des Quadrat-Gitters noch nicht vollständig beantwortet. Übrig bleibt ein sechszelliges Polyomino, dem der Name Snaky (siehe Abbildung 1) gegeben wurde, für das es noch nicht bekannt ist, ob es ein Gewinner oder ein Verlierer ist. Für das Dreieck-Gitter ([14]) und die fünf platonischen Körper ([1]) sind die Mengen der Gewinner jeweils vollständig charakterisiert. Für das

1 Einleitung

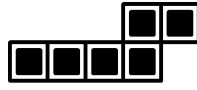


Abbildung 1: Das Polyomino Snaky.

Sechseck-Gitter gibt es erste Ergebnisse ([2]).

Für weitere Varianten des Spiels, bei denen zum Beispiel die Kanten eines Graphen in der Farbe des Spielers gefärbt werden, befinden sich Ergebnisse in [4, 8, 9, 11, 12, 13, 19].

2 Spielbretter und Polyominos

In diesem Abschnitt werden als erstes die Mosaik-Graphen definiert, deren planare Darstellungen in dieser Arbeit als Spielbretter betrachtet werden sollen. Desweiteren werden Polyominos definiert, mit deren Hilfe das Ziel des ersten Spielers beim Aufbau-spiel festgelegt wird. Zuletzt wird ein Verfahren beschrieben, mit dem die Polyominos eines Mosaik-Graphen mit Hilfe des Computers erzeugt werden können.

2.1 Mosaik-Graphen

Mosaik-Graphen sind diejenigen planaren Graphen, die ohne Kantenüberkreuzungen realisiert sind und die zusätzliche Eigenschaft besitzen, daß es für je zwei ihrer Knoten einen Automorphismus gibt, der den einen Knoten auf den anderen abbildet. Die Ecken des Mosaik-Graphen sind also nicht voneinander zu unterscheiden. Daraus folgt, daß die Reihenfolgen der einen jeden Knoten umgebenden Flächentypen (unterschieden nach Eckenanzahl) bis auf Orientierung jeweils gleich sind. Die Folge der Eckenanzahlen der Flächen um einen Knoten wird als *Eckenfolge* (p_1, \dots, p_q) bezeichnet. Abbildung 2 zeigt einen Ausschnitt des Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge $(3, 3, 4, 3, 4)$. Sind alle

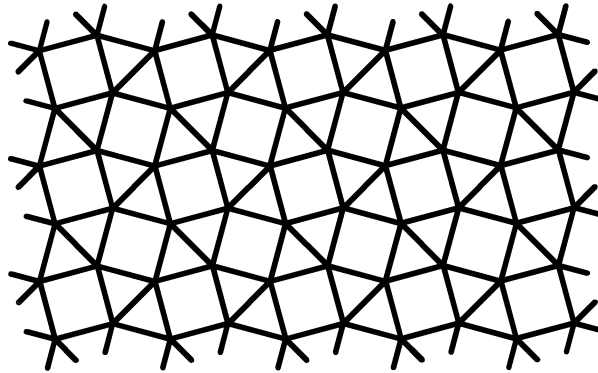


Abbildung 2: Mosaik-Graph mit der Eckenfolge $(3,3,4,3,4)$.

Flächentypen gleich, gilt also $p_1 = \dots = p_q = p$, so wird der Graph *regulärer Mosaik-Graph* oder (p,q) -Graph genannt. Der Mosaik-Graph mit der Eckenfolge $(3,3,3,3)$ wird also auch $(3,4)$ -Graph genannt. Stellt man sich die Mosaik-Graphen durch reguläre p_i -Ecke dargestellt vor, so kann man sie entsprechend der Summe $S = \sum_{i=1}^q (180^\circ - 360^\circ/p_i)$ der Innenwinkel der einen Knoten umgebenden Vielecke in drei Klassen unterteilen. Ist S kleiner als 360° , so ist eine Darstellung durch reguläre Vielecke auf der Oberfläche einer Kugel möglich, und die Mosaik-Graphen werden dann *sphärisch* genannt. Ist S gleich 360° , so ist die Darstellung durch reguläre Vielecke in der Ebene möglich und die Graphen werden *eben* genannt. Die Mosaik-Graphen mit S größer als 360° heißen *hyperbolische Mosaiken*. Bei den regulären Mosaiken ist diese Einteilung leichter mit Hilfe des Produkts $(p-2)(q-2)$ möglich. Ist es kleiner, gleich oder größer als 4, so ist der Graph entsprechend sphärisch, eben oder hyperbolisch. Durch diese Einteilung und

2 Spielbretter und Polyominos

die Unterscheidung, ob sie regulär sind oder nicht, werden die Mosaik-Graphen also in sechs Klassen eingeteilt, die außer im hyperbolischen Fall jeweils eigene Namen haben (siehe Tabelle 1).

	Winkel- summe	regulär	
		ja	nein
sphärisch	$< 360^\circ$	platonische Körper	archimedische Körper
eben	$= 360^\circ$	euklidische Parkettierungen	archimedische Parkettierungen
hyperbolisch	$> 360^\circ$	hyperbolische Mosaik-Graphen	

Tabelle 1: Einteilung der Mosaik-Graphen.

Als Spielbretter sollen die Mosaik-Graphen als Ganzes betrachtet werden. Bei kleinen Ausschnitten, wie etwa dem 3×3 -Schachbrett aus dem Quadrat-Gitter, können sich zwar andere Gewinner- und Verlierermengen als beim Mosaik-Graphen ergeben, jedoch erhält man ab einer gewissen Größe des Ausschnitts jeweils keine Unterschiede mehr.

2.2 Polyominos

Als *Polyominos* eines Mosaik-Graphen werden die endlichen, nichtleeren, einfach-zusammenhängenden, echten Teilmengen der Flächen des Graphen bezeichnet. Dabei heißt eine Menge von Flächen *zusammenhängend*, wenn je zwei ihrer Flächen durch eine Folge von kantenbenachbarten Flächen der Menge selbst verbunden sind (Turmwege). Sie heißt *einfachzusammenhängend*, wenn sowohl sie als auch ihr Komplement zusammenhängend sind. Dabei werden zwei Teilmengen, die durch eine Kongruenzabbildung (Reflektion, Translation und Rotation) ineinander übergehen, als dasselbe Polyomino betrachtet. *Kongruenzabbildungen* in Mosaik-Graphen sind genau diejenigen Abbildungen, die den Graphen auf sich selbst abbilden. Zwischen den beiden durch jeweils zwei schwarze Dreiecke gekennzeichneten Polyominos in Abbildung 3 wird also unterschieden, da sie sich nicht durch eine Abbildung aufeinander abbilden lassen, die gleichzeitig den zu Grunde liegenden Mosaik-Graphen auf sich selbst abbildet. Dies läßt sich unter anderem dadurch erkennen, daß nur das rechte Polyomino ein Dreieck enthält, das nur zu Dreiecken kantenbenachbart ist. Die Anzahl der Zellen eines Polyominos wird als seine *Größe* bezeichnet.

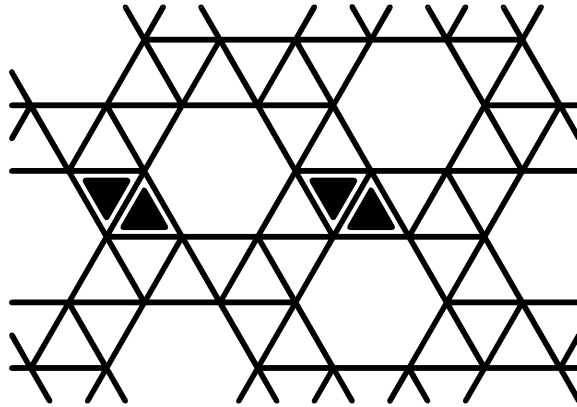


Abbildung 3: Zwei verschiedene Polyominos.

2.3 Computereinsatz

Für die fünf platonischen Körper, die drei euklidischen Parkettierungen und einige hyperbolische Mosaik wurde die Frage nach der Anzahl der Polyominos bereits betrachtet ([16, 22]). Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Ergebnisse erweitert und für die archimedischen Körper und archimedischen Parkettierungen erstmals betrachtet werden. In Hinblick auf die Frage nach Gewinnern und Verlierern wurden die Anzahlen der Polyominos mit Hilfe des Computers jeweils konstruktiv bestimmt.

Beginnend mit den Polyominos der Größe 1 werden nacheinander die Mengen der nächstgrößeren Polyominos konstruiert. Alle Polyominos einer Größe werden dabei nacheinander an jeder freien Kante um eine Zelle erweitert. Sortiert man diejenigen Polyominos aus, die nicht einfachzusammenhängend sind oder doppelt vorkommen, so erhält man die Polyominos der nächsthöheren Größe.

Die Tatsache, daß es bei den archimedischen Körpern und Parkettierungen verschiedene Flächentypen gibt, kann man sich beim Erzeugen der Polyominos zu Nutze machen. Hier werden die Polyominos nicht nur nach ihrer Größe, sondern auch nach den Anzahlen der vorkommenden Flächentypen unterschieden. Da die erzeugten Mengen wegen der feineren Unterscheidung kleiner sind, vereinfacht sich das Aussortieren der Duplikate.

3 Aufbau- und Verhinderungsstrategien

Die Frage danach, ob ein Polyomino ein Gewinner oder ein Verlierer ist, wird immer konstruktiv beantwortet. Ist ein Polyomino ein Gewinner, so wird also eine Strategie angegeben, mit der Spieler A dieses Polyomino unabhängig von den Zügen des Spielers B aufbauen kann. Eine solche Strategie heißt *Aufbaustrategie*. Ist ein Polyomino ein Verlierer, wird eine Strategie für Spieler B angegeben, mit deren Hilfe er Spieler A immer daran hindern kann, das Polyomino erfolgreich aufzubauen. Diese Strategien heißen *Verhinderungsstrategien*.

Beim A-Aufbauspiel ist eine Aufbaustrategie für ein Polyomino immer auch Aufbaustrategie für jedes seiner Teilpolyminos. Ist ein Polyomino ein Gewinner, sind also alle seine Teilpolyminos ebenfalls Gewinner. Ein Gewinner, der nicht in einem anderen Gewinner enthalten ist, wird *elementarer Gewinner* genannt. Enthält ein Polyomino einen Verlierer, so ist es also selbst auch ein Verlierer. Ein Verlierer, der keinen anderen Verlierer enthält, wird *elementarer Verlierer* genannt. Will man also eine Unterteilung aller Polyminos eines Spielbrettes in Gewinner und Verlierer beweisen, so genügt es, die Beweise für die elementaren Polyminos zu führen.

3.1 Aufbaustrategien

Mit Hilfe eines Beispiels soll hier erklärt werden, wie in dieser Arbeit Aufbaustrategien formuliert werden. Abbildung 4 zeigt eine Aufbaustrategie für das Polyomino auf dem

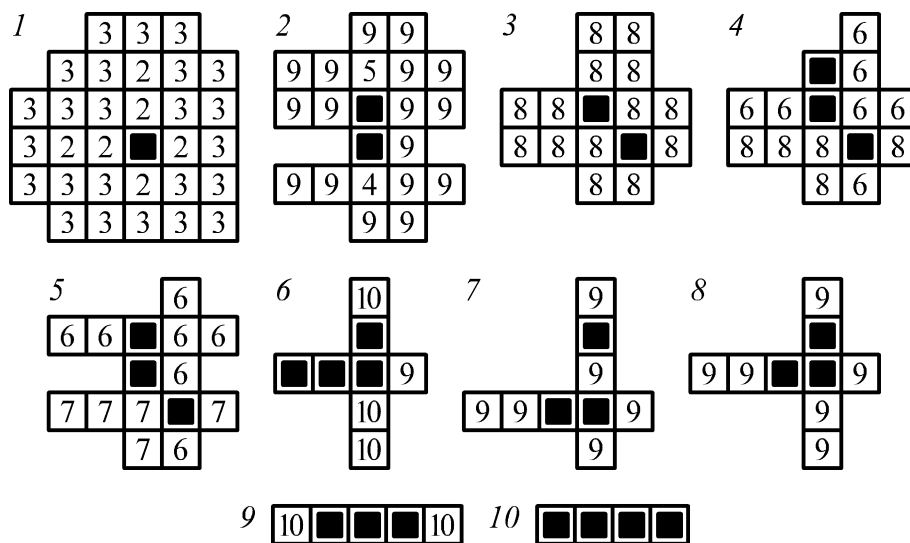


Abbildung 4: Aufbaustrategie.

Quadrat-Gitter, das aus 4 Quadraten in einer Reihe besteht.

Eine *Aufbaustrategie* besteht aus einer Folge von nummerierten Gewinnsituationen. Jede dieser *Gewinnsituationen* stellt einen Ausschnitt des Spielbrettes unmittelbar vor

dem nächsten Zug des Spielers B dar. Die gefüllten Spielfelder sind dabei schon von Spieler A besetzt und die numerierten sind nicht von Spieler B besetzt. Setzt Spieler B seinen Spielstein nun in einer dieser Gewinnsituationen auf ein numeriertes Feld, so gibt dessen Nummer die Nummer derjenigen Gewinnsituation an, die Spieler A durch seinen nächsten Zug erreichen muß. Setzt Spieler B auf ein in der Gewinnsituation nicht vorhandenes Spielfeld, so wählt Spieler A irgendeine Gewinnsituation, deren Nummer in einem der Spielfelder steht.

Die erste Gewinnsituation einer Strategie enthält genau ein gefülltes, also schon von Spieler A besetztes Spielfeld. Die letzte Gewinnsituation ist die einzige, die nur gefüllte Felder enthält, und diese sind in der Form des aufzubauenden Polyomino. Der Erfolg einer auf diese Art angegebenen Strategie ist gesichert, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Setzt Spieler B auf ein numeriertes Feld einer Gewinnsituation, so muß sich die durch diese Nummer angegebene Gewinnsituation durch den nächsten Zug des Spielers A erreichen lassen.

Felder, die durch einen Strich gekennzeichnet sind, gehören nicht zur Gewinnsituation (siehe zum Beispiel Situation 6 in Abbildung 23 auf Seite 22).

3.2 Verhinderungsstrategien

Ist ein Polyomino ein Gewinner, so läßt sich eine Aufbaustrategie theoretisch immer auf die im vorhergehenden Abschnitt erklärte graphische Art formulieren. Ein allgemeines Verfahren für die Formulierung von Verhinderungsstrategien ist jedoch nicht bekannt. Die im Folgenden beschriebenen Paareinteilungsstrategien sind die am häufigsten benutzten.

Bei einer *Paareinteilungsstrategie* stellt sich Spieler B die Felder des Spielbrettes abhängig vom gegebenen Polyomino in Paare eingeteilt vor. Dabei müssen nicht alle Felder einem Paar angehören. In Abbildung 5 ist eine solche Einteilung für das Poly-

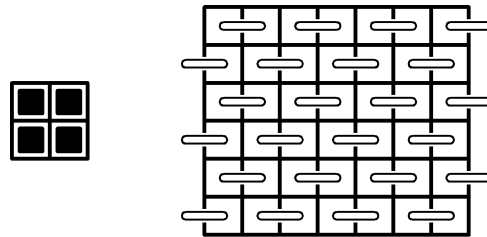


Abbildung 5: Paareinteilungsstrategie.

omino auf dem Quadrat-Gitter angegeben, das aus 4 Quadraten um eine Ecke herum besteht. Besetzt nun Spieler A im Laufe des Spiels ein Feld eines Paares, so besetzt Spieler B im folgenden Zug das andere Feld. Besetzt Spieler A ein Feld, das nicht einem Paar angehört, so besetzt Spieler B ein beliebiges Feld. Gibt es nun für jede Lage des Polyomino auf dem Spielbrett ein Paar, dessen beide Felder in dem Polyomino enthalten sind, so wird durch diese Paareinteilung eine erfolgreiche Verhinderungsstrategie

festgelegt, da Spieler A nie beide Felder eines Paares besetzen kann.

Alle bekannten Verlierer auf dem Quadrat-Gitter können mit Hilfe von Paareinteilungsstrategien nachgewiesen werden. Für Snaky (siehe Abbildung 1), dem einzigen Polyomino auf dem Quadrat-Gitter, bei dem noch nicht entschieden werden konnte, ob es sich um einen Gewinner oder Verlierer handelt, konnte in [18] jedoch bereits nachgewiesen werden, daß keine erfolgreiche Paareinteilungsstrategie existiert, bei der die Einteilung in Paare vor Beginn des Spiels stattfindet. Für alle Verlierer unter den Polyominos der platonischen Körper, außer einem auf dem Ikosaeder, führen Paareinteilungen vor Beginn des Spiels zum Erfolg. Für den einen Verlierer auf dem Ikosaeder läßt sich jedoch eine erfolgreiche Strategie angeben, bei der die Einteilung der Spielfelder in Paare erst nach dem zweiten Zug des Spielers A stattfindet.

3.3 Computereinsatz

In vielen Fällen wurden die Verhinderungs- und Aufbaustrategien mit Hilfe des Computers gefunden.

Verhinderungsstrategien können etwa wie folgt gefunden werden. Zunächst werden alle Paareinteilungen in endliche Klassen angemessener Größe eingeteilt. Die Paareinteilungen jeder Klasse können dann systematisch daraufhin überprüft werden, ob sie erfolgreiche Strategien bestimmen. Die Einteilung der Klassen hängt von den Spielbrettern ab und wird in den Abschnitten 5.1, 6.3.1 und 7.1 beschrieben.

Viele Aufbaustrategien wurden mit Hilfe eines interaktiven Programms erzeugt. Dabei spielt der Benutzer des Programms als Spieler A gegen den Rechner als Spieler B. Im Laufe des Spiels werden Gewinnsituationen (siehe Abschnitt 3.1) abgespeichert, die im Falle des Erfolges eine Aufbaustrategie sind. Zu Anfang ist nur diejenige Gewinnsituation gespeichert, die aus dem aufzubauenden Polyomino besteht. Nach jedem Zug von Spieler A unterscheidet das Programm drei Fälle:

1. Spieler A kann mit seinem nächsten Zug keine der bisher gespeicherten Gewinnsituationen erreichen: Spieler B verzichtet auf seinen nächsten Zug, und Spieler A macht seinen nächsten Zug.
2. Spieler B kann mit seinem nächsten Zug verhindern, daß Spieler A eine der bisher gespeicherten Gewinnsituationen erreicht: Spieler B macht einen solchen Zug, danach macht Spieler A seinen nächsten Zug.
3. Spieler B kann mit seinem nächsten Zug nicht verhindern, daß Spieler A eine der bisher gespeicherten Gewinnsituationen erreicht: Als neue Gewinnsituation wird ein Ausschnitt des Spielbrettes abgespeichert, innerhalb dessen Spieler B nicht verhindern kann, daß Spieler A eine der gespeicherten Gewinnsituationen erreicht. Dieser Ausschnitt ist die Vereinigung derjenigen Ausschnitte des Spielbrettes, die zu jedem Zug von Spieler B jeweils einer ausgewählten, von Spieler A erreichbaren Gewinnsituation entsprechen. Die Nummern der ausgewählten

Gewinnsituationen stehen dann jeweils in demjenigen Feld der neuen Gewinnsituation, auf das Spieler B gesetzt hat. Für alle Züge von Spieler B, die außerhalb eines festgewählten Ausschnitts liegen, der einer beliebig gewählten erreichbaren Gewinnsituation entspricht, läßt sich diese Gewinnsituation für die Vereinigung auswählen. Es reichen also insgesamt endlich viele verschiedene Ausschnitte, und damit ist auch die neue Gewinnsituation endlich. — Dann werden der jeweils letzte Zug von Spieler A und B zurückgenommen, und die Fallunterscheidung wird in Bezug auf den vorhergehenden Zug von Spieler A vorgenommen.

Wurde eine Gewinnsituation gespeichert, bei der nur noch ein einziges Feld schon von Spieler A besetzt sein muß, so sind die gespeicherten Gewinnsituationen eine Aufbaustrategie, und das Programm ist beendet. Die Gewinnsituationen werden in der Aufbaustrategie schließlich so angeordnet, daß die Nummern in den Feldern einer Gewinnsituation jeweils größer als die Nummer der Gewinnsituation selbst sind.

4 Platonische Körper

Die fünf platonischen Körper (siehe Abbildung 6) sind die sphärischen regulären

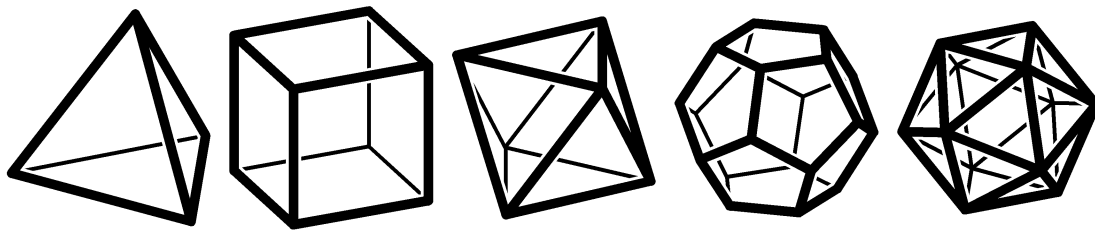


Abbildung 6: Die fünf platonischen Körper.

Mosaik-Graphen. Sie sind in Tabelle 2 mit den Anzahlen ihrer Flächen, Ecken und Kanten aufgelistet. Für die Polyominos der platonischen Körper ist die Frage nach

Name	Eckenfolge	f	e	k
Tetraeder	(3,3,3)	4	4	6
Hexaeder	(4,4,4)	6	8	12
Oktaeder	(3,3,3,3)	8	6	12
Dodekaeder	(5,5,5)	12	20	30
Ikosaeder	(3,3,3,3,3)	20	12	30

Tabelle 2: Platonische Körper.

Gewinnern und Verlierern bereits vollständig gelöst [1]. Hier sollen deshalb nur die Ergebnisse angegeben werden. Die Anzahlen der Polyominos der fünf platonischen Körper sind in Tabelle 3 angegeben. Für Polyominos mit mehr als $f/2$ Zellen ergeben

Name	Eckenfolge	Größe										Summe
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tetraeder	(3,3,3)	1	1	1								3
Hexaeder	(4,4,4)	1	1	2	1	1						6
Oktaeder	(3,3,3,3)	1	1	1	3	1	1	1				9
Dodekaeder	(5,5,5)	1	1	2	4	6	11	6	4	2	1	39
Ikosaeder	(3,3,3,3,3)	1	1	1	3	4	9	14	29	40	59	263

Tabelle 3: Die Anzahlen der Polyominos der platonischen Körper.

sich die Anzahlen aus der Tatsache, daß das Komplement eines Polyominos auf einem endlichen Spielbrett wieder ein Polyomino ist. Diese Anzahlen wurden bereits in [16] bestimmt.

4.1 Tetraeder (3,3,3)

In Abbildung 7 sind alle Polyominos des Tetraeders gezeigt. Die beiden Polyominos mit bis zu zwei Zellen sind Gewinner, das Polyomino mit drei Zellen ist ein Verlierer. Das zwei- und das dreizellige Polyomino sind elementar.

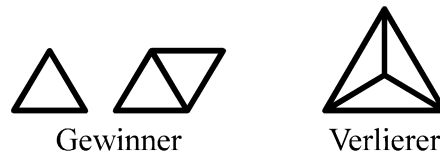


Abbildung 7: Gewinner und Verlierer, Tetraeder.

4.2 Hexaeder (4,4,4)

In Abbildung 8 sind alle Polyominos des Würfels (Hexaeders) gezeigt. Drei von ihnen sind Gewinner und drei von ihnen Verlierer. Nur die beiden dreizelligen Polyominos sind elementar.

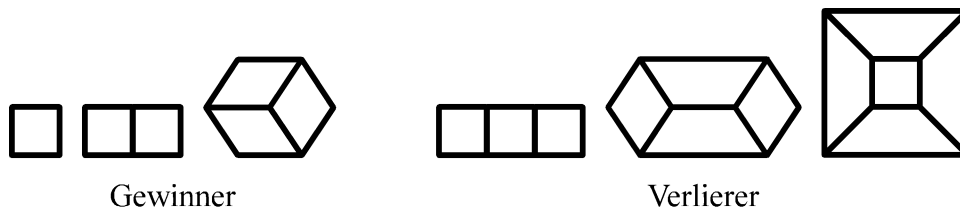


Abbildung 8: Gewinner und Verlierer, Würfel.

4.3 Oktaeder (3,3,3,3)

Die Gewinner und elementaren Verlierer des Oktaeders sind in Abbildung 9 dargestellt. Nur der dreizellige Gewinner ist ein elementarer Gewinner.

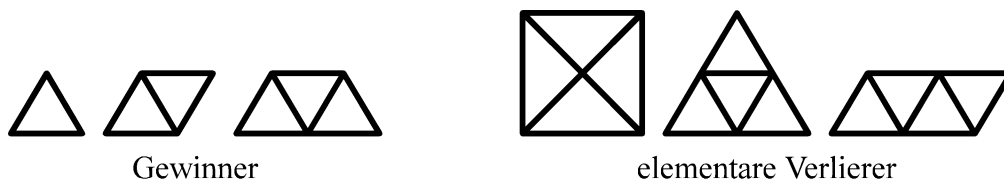


Abbildung 9: Gewinner und elementare Verlierer, Oktaeder.

4.4 Dodekaeder (5,5,5)

Auf dem Dodekaeder gibt es 7 Gewinner und 32 Verlierer. Abbildung 10 zeigt den elementaren Gewinner und die drei elementaren Verlierer.

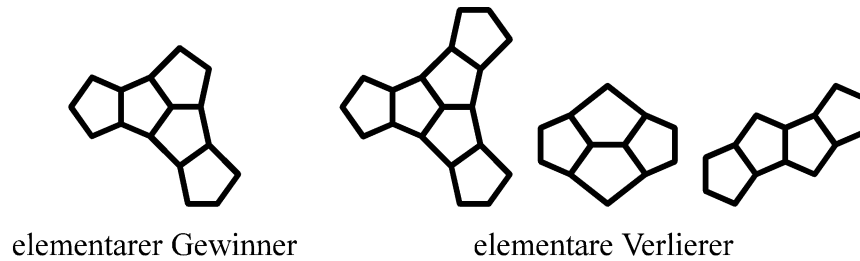


Abbildung 10: Elementare Gewinner und Verlierer, Dodekaeder.

4.5 Ikosaeder (3,3,3,3,3)

Fünf Polyominos des Ikosaeders sind Gewinner, 258 Polyominos sind Verlierer. In Abbildung 11 sind die beiden elementaren Gewinner und die vier elementaren Verlierer dargestellt.

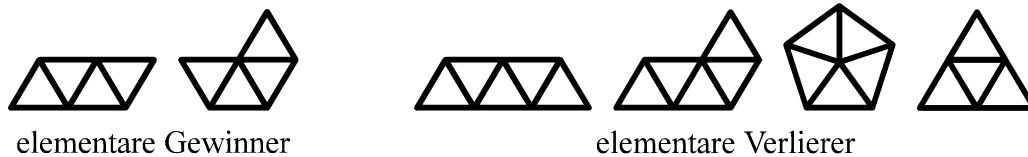


Abbildung 11: Elementare Gewinner und Verlierer, Ikosaeder.

5 Archimedische Körper

Die archimedischen Körper sind die sphärischen nichtregulären Mosaik-Graphen. Neben den beiden unendlichen Klassen der Prismen und Antiprismen gibt es 13 verschiedene archimedische Körper ([25]). Sie sind in Tabelle 4 mit den Anzahlen ihrer Flächen, Ecken und Kanten aufgelistet.

Name	Eckenfolge	f	e	k
Abgestumpftes Tetraeder	(3,6,6)	8	12	8
Kuboktaeder	(3,4,3,4)	14	12	24
Abgestumpfter Würfel	(3,8,8)	14	24	36
Abgestumpftes Oktaeder	(4,6,6)	14	24	36
Rhombenkuboktaeder	(3,4,4,4)	26	24	48
Abgestumpftes Kuboktaeder	(4,6,8)	26	48	72
Ikosidodekaeder	(3,5,3,5)	32	30	60
Abgestumpftes Dodekaeder	(3,10,10)	32	60	90
Abgestumpftes Ikosaeder	(5,6,6)	32	60	90
Abgeschrägter Würfel	(3,3,3,3,4)	38	24	60
Rhombenikosidodekaeder	(3,4,5,4)	62	60	120
Abgestumpftes Ikosidodekaeder	(4,6,10)	62	120	180
Abgeschrägtes Dodekaeder	(3,3,3,3,5)	92	60	150
Archimedische Prismen	$(4,4,n), n \neq 4$	$n+2$	$2n$	$3n$
Archimedische Antiprismen	$(3,3,3,n), n \neq 3$	$2n+2$	$2n$	$4n$

Tabelle 4: Archimedische Körper.

Für die archimedischen Körper mit den Eckenfolgen (3,6,6), (3,4,3,4), (3,8,8), (4,6,6) und (3,3,3,3,4) ist es gelungen, die Frage nach Gewinnern und Verlierern für alle Polyominos zu beantworten. Bei der Eckenfolge (3,3,3,3,5) gibt es noch vier ungelöste Fälle. Für die jeweils drei kleinsten Prismen und Antiprismen sind ebenfalls vollständige Lösungen angegeben. Für alle anderen archimedischen Körper, außer den Prismen und Antiprismen, konnten obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner bestimmt werden.

5.1 Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner

Für die archimedischen Körper mit mehr als 14 Flächen, außer den Prismen und Antiprismen, wurden obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner mit Hilfe von Paareinteilungsstrategien bestimmt. Da die Anzahlen aller Paareinteilungen für eine vollständige Untersuchung zu groß sind, wurden nur Paareinteilungen untersucht, die eine bestimmte Symmetrie aufweisen oder bei denen die Längen der Paare einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Die *Länge* eines Paares ist dabei die minimale Anzahl von Schritten über kantenbenachbarte Felder vom einen zum anderen Feld des

Paares. Die *Symmetrie* einer Paareinteilung wird mit Hilfe von Abbildungen (Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen) bestimmt, die den archimedischen Körper auf sich selbst abbilden. Die Anzahlen aller dieser Abbildungen für die verschiedenen archimedischen Körper sind in Tabelle 5 enthalten. Einer Paareinteilung wird die

Eckenfolgen	Anzahl
(3,6,6), (3,3,3,3,4)	24
(3,4,3,4), (3,8,8), (4,6,6), (3,4,4,4), (4,6,8)	48
(3,3,3,3,5)	60
(3,5,3,5), (3,10,10), (5,6,6), (3,4,5,4), (4,6,10)	120
(3,3,3, n), $n \neq 3$, (4,4, n), $n \neq 4$	$4n$

Tabelle 5: Anzahlen der Abbildungen.

Eigenschaft (s, l) zugeordnet, wenn es mindestens s verschiedene Abbildungen gibt, unter denen die Paareinteilung in sich selbst übergeht, und wenn alle Paare höchstens die Länge l haben.

Es läßt sich nun per Computer überprüfen, ob sich unter den Polyominos einer bestimmten Größe solche befinden, die sich mit Hilfe von Paareinteilungen mit einer gegebenen Eigenschaft (s, l) als Verlierer nachweisen lassen. Sind alle Polyominos einer Größe Verlierer, so sind auch alle größeren Polyominos Verlierer.

5.2 Abgestumpftes Tetraeder (3,6,6)

Das abgestumpfte Tetraeder ist in Abbildung 12 gezeigt. Die Anzahlen der Polyominos

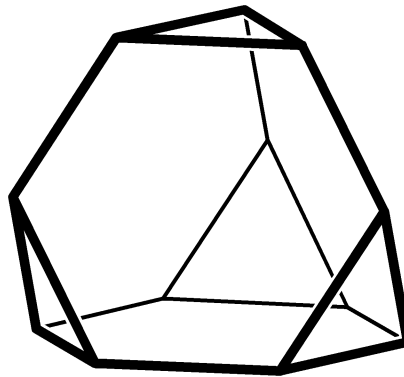


Abbildung 12: Das abgestumpfte Tetraeder.

des abgestumpften Tetraeders sind in Tabelle 6 enthalten. Es gibt 6 Gewinner und 13 Verlierer. Abbildung 13 zeigt die elementaren Gewinner und Verlierer. Die Abbildungen 14 und 15 zeigen Aufbaustrategien für die beiden elementaren Gewinner. In den Abbildungen 16 und 17 sind Paareinteilungen für die elementaren Verlierer dargestellt.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	5	3
2	2	6	2
3	3	7	2
4	5	Summe	19

Tabelle 6: Anzahlen der Polyminos des abgestumpften Tetraeders.

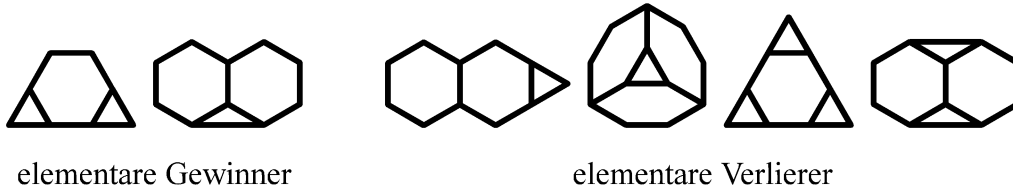


Abbildung 13: Elementare Gewinner und Verlierer, abgestumpftes Tetraeder.

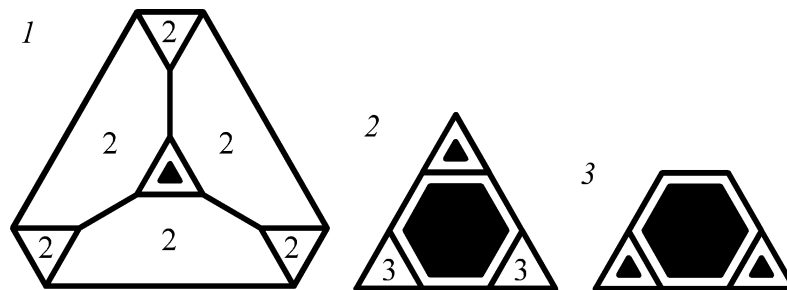


Abbildung 14: Aufbaustrategie, abgestumpftes Tetraeder.

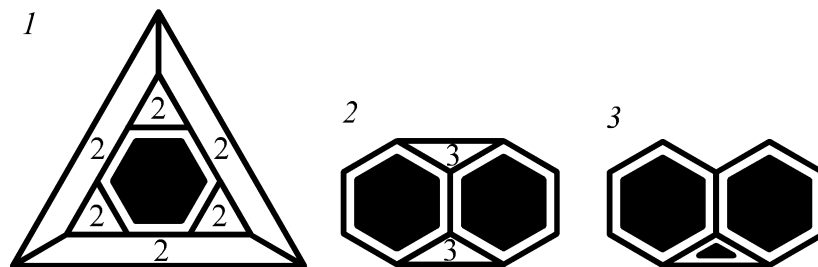


Abbildung 15: Aufbaustrategie, abgestumpftes Tetraeder.

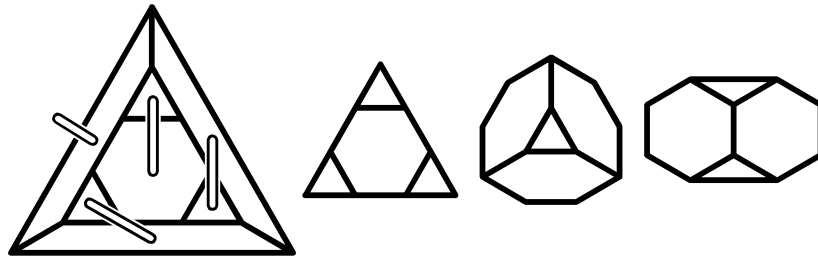


Abbildung 16: Paareinteilungsstrategie, abgestumpftes Tetraeder.

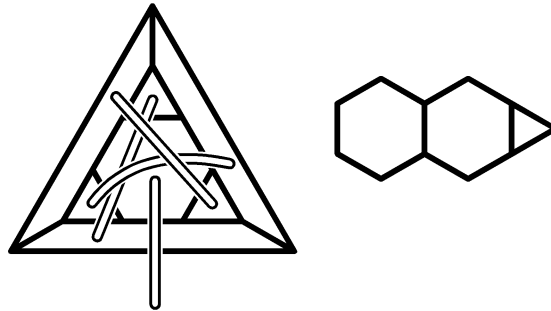


Abbildung 17: Paareinteilungsstrategie, abgestumpftes Tetraeder.

5.3 Kuboktaeder (3,4,3,4), abgestumpfter Würfel (3,8,8) und abgestumpftes Oktaeder (4,6,6)

Das Kuboktaeder, der abgestumpfte Würfel und das abgestumpfte Oktaeder sind abgesehen von den Prismen und Antiprismen die drei 14-flächigen archimedischen Körper. Sie sind in Abbildung 18 dargestellt. Da sie die gleichen Symmetrien besitzen (in Ab-

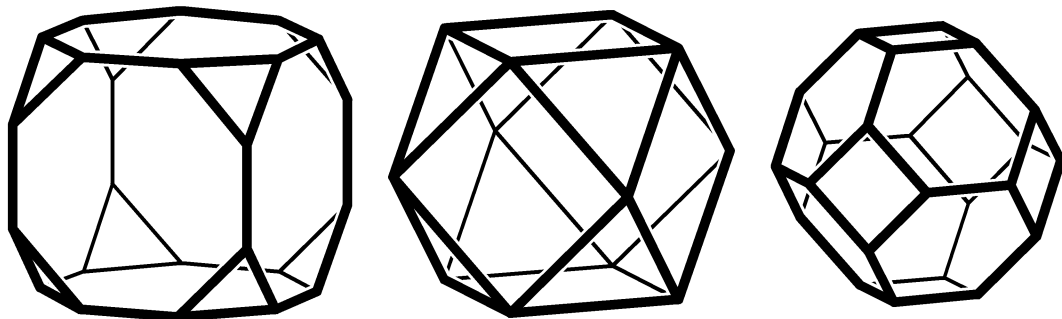


Abbildung 18: Der abgestumpfte Würfel (3,8,8), das Kuboktaeder (3,4,3,4) und das abgestumpfte Oktaeder (4,6,6).

bildung 18 zeigen einander entsprechende Flächen in die gleiche Richtung), werden sie hier gemeinsam behandelt. Für jede Teilmenge von Flächen eines dieser Körper gibt es entsprechende Teilmengen auf den beiden anderen Körpern, die sich höchstens durch

ihre Zusammenhangseigenschaften unterscheiden. Sind zwei sich entsprechende Teilmengen Polyominos, so sind sie also beide Gewinner oder beide Verlierer. Der Beweis muß daher nur für eines dieser Polyominos geführt werden. Tabellen 7 bis 9 enthalten

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	8	15
2	1	9	10
3	3	10	5
4	5	11	3
5	10	12	1
6	15	13	2
7	20	Summe	92

Tabelle 7: Anzahlen der Polyominos des Kuboktaeders.

die Anzahlen der Polyominos. Abbildung 19 zeigt die elementaren Gewinner. Die sich

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	8	25
2	2	9	19
3	5	10	10
4	10	11	5
5	19	12	2
6	25	13	2
7	32	Summe	158

Tabelle 8: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Würfels.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	8	40
2	2	9	24
3	5	10	11
4	11	11	5
5	24	12	2
6	40	13	2
7	53	Summe	221

Tabelle 9: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Oktaeders.

entsprechenden Polyominos sind untereinander angeordnet. Die Abbildungen 20 bis 28 zeigen die zugehörigen Aufbaustrategien. Es ist zu beachten, daß in den Abbildungen 20, 21, 23 und 25 jeweils auch die umgebende Fläche der Situation *I* numeriert ist.

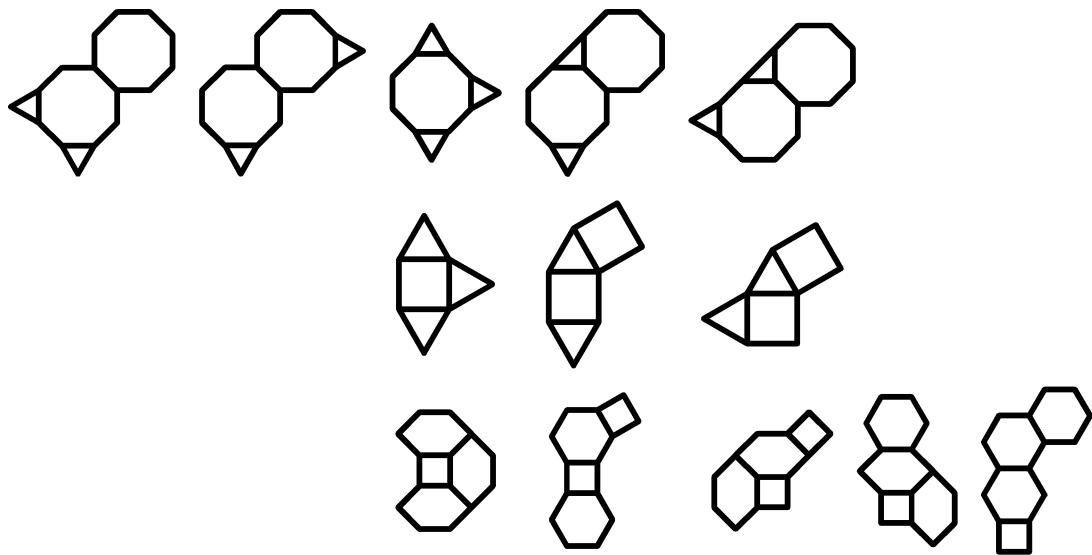


Abbildung 19: Elementare Gewinner, abgestumpfter Würfel, Kuboktaeder und abgestumpftes Oktaeder.

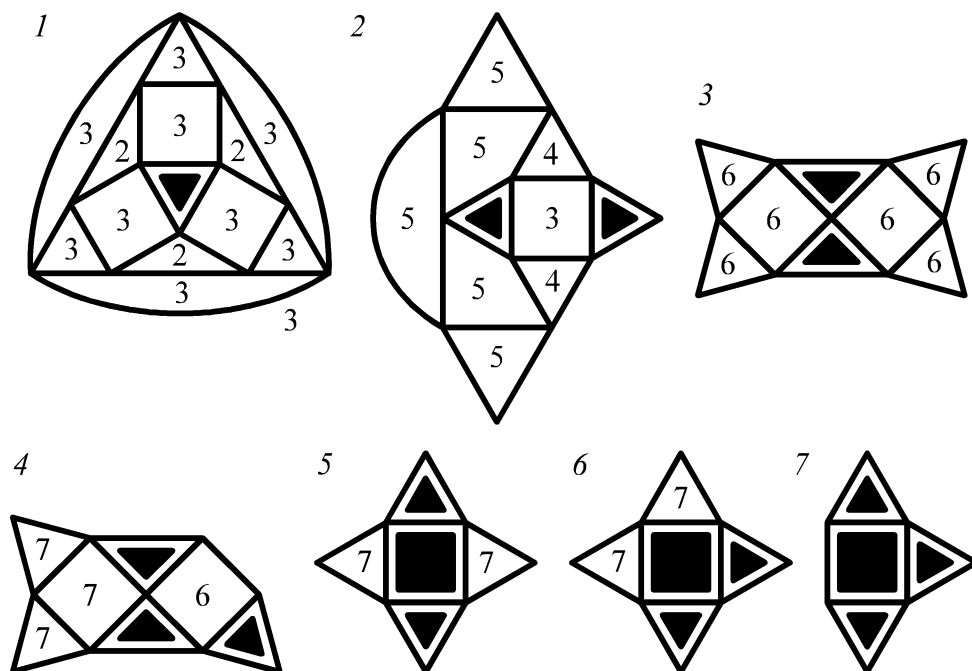


Abbildung 20: Aufbaustrategie, Kuboktaeder.

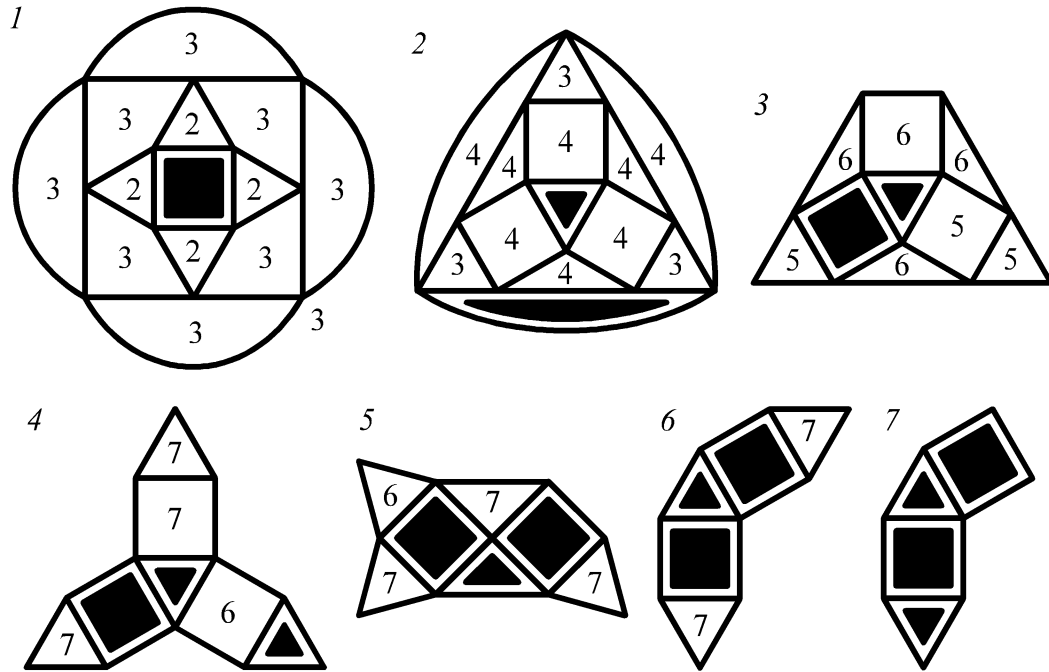


Abbildung 21: Aufbaustrategie, Kuboktaeder.

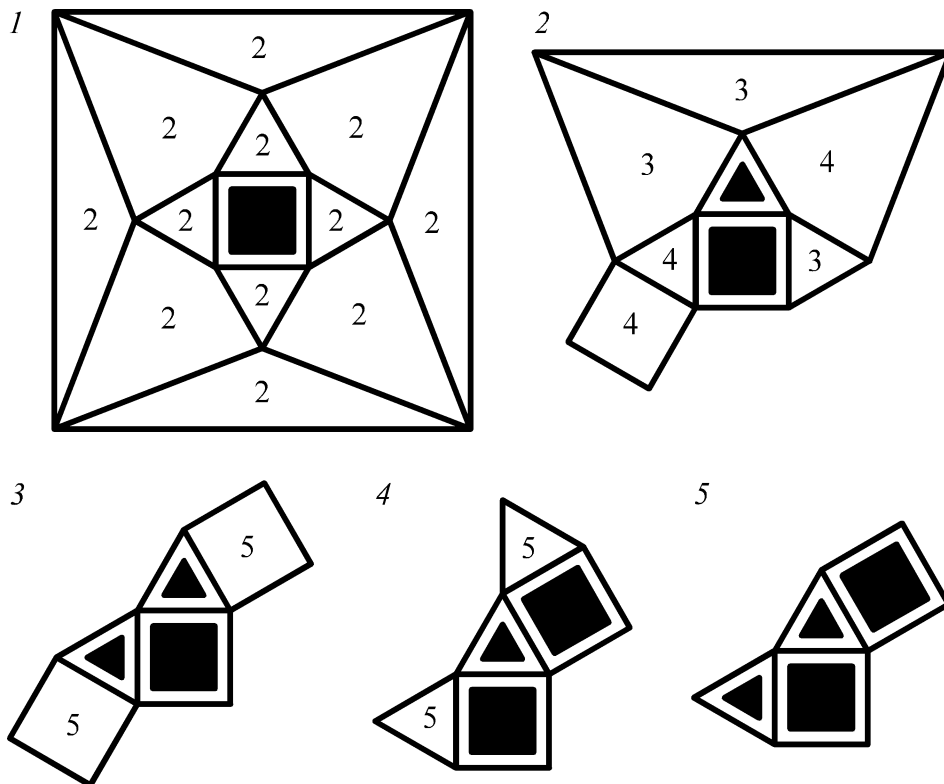


Abbildung 22: Aufbaustrategie, Kuboktaeder.

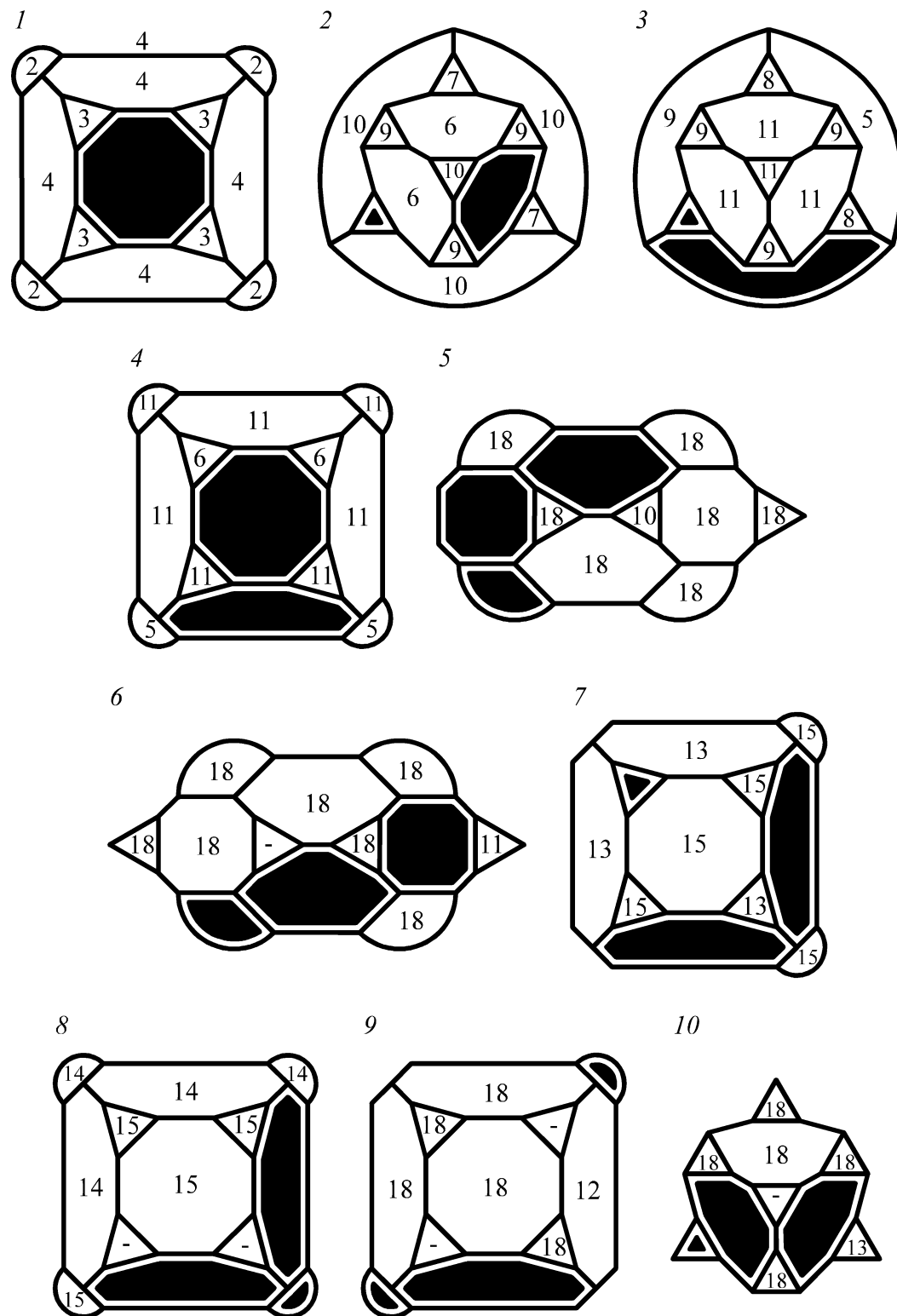


Abbildung 23: Aufbaustrategie, abgestumpfter Würfel, Teil 1.

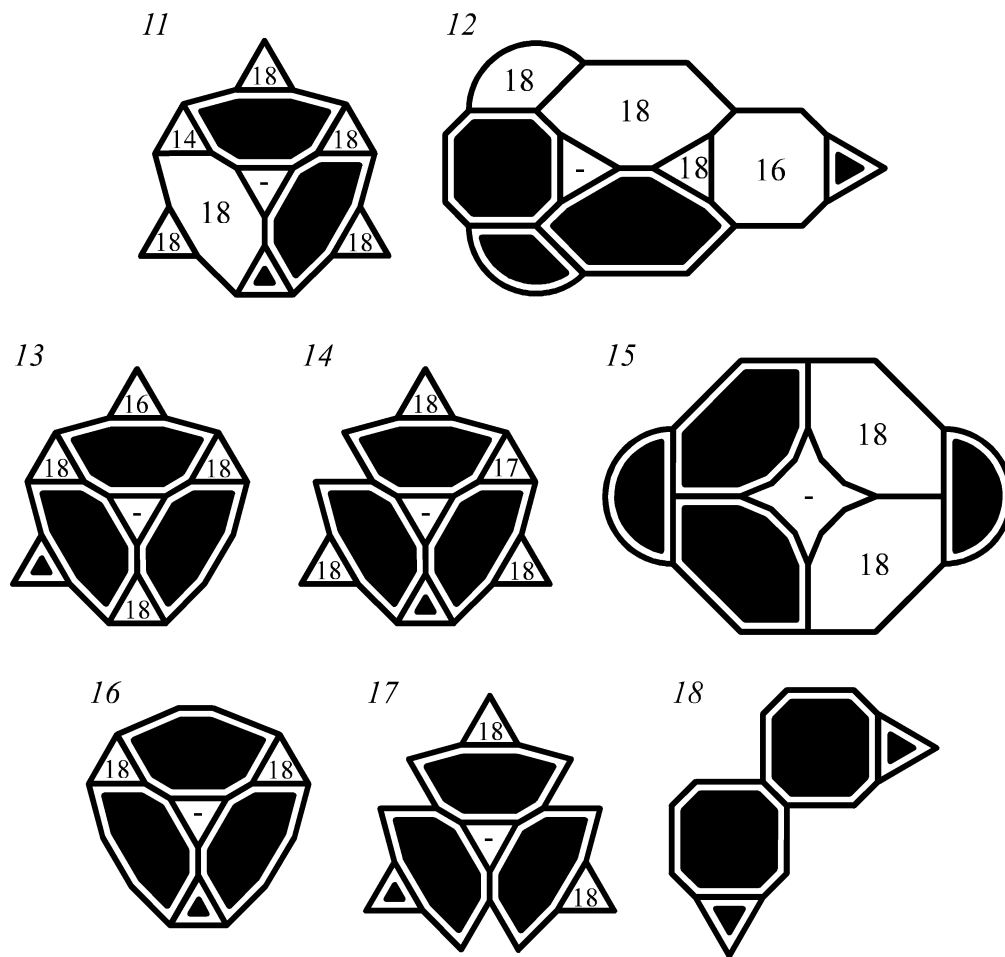


Abbildung 24: Aufbaustrategie, abgestumpfter Würfel, Teil 2.

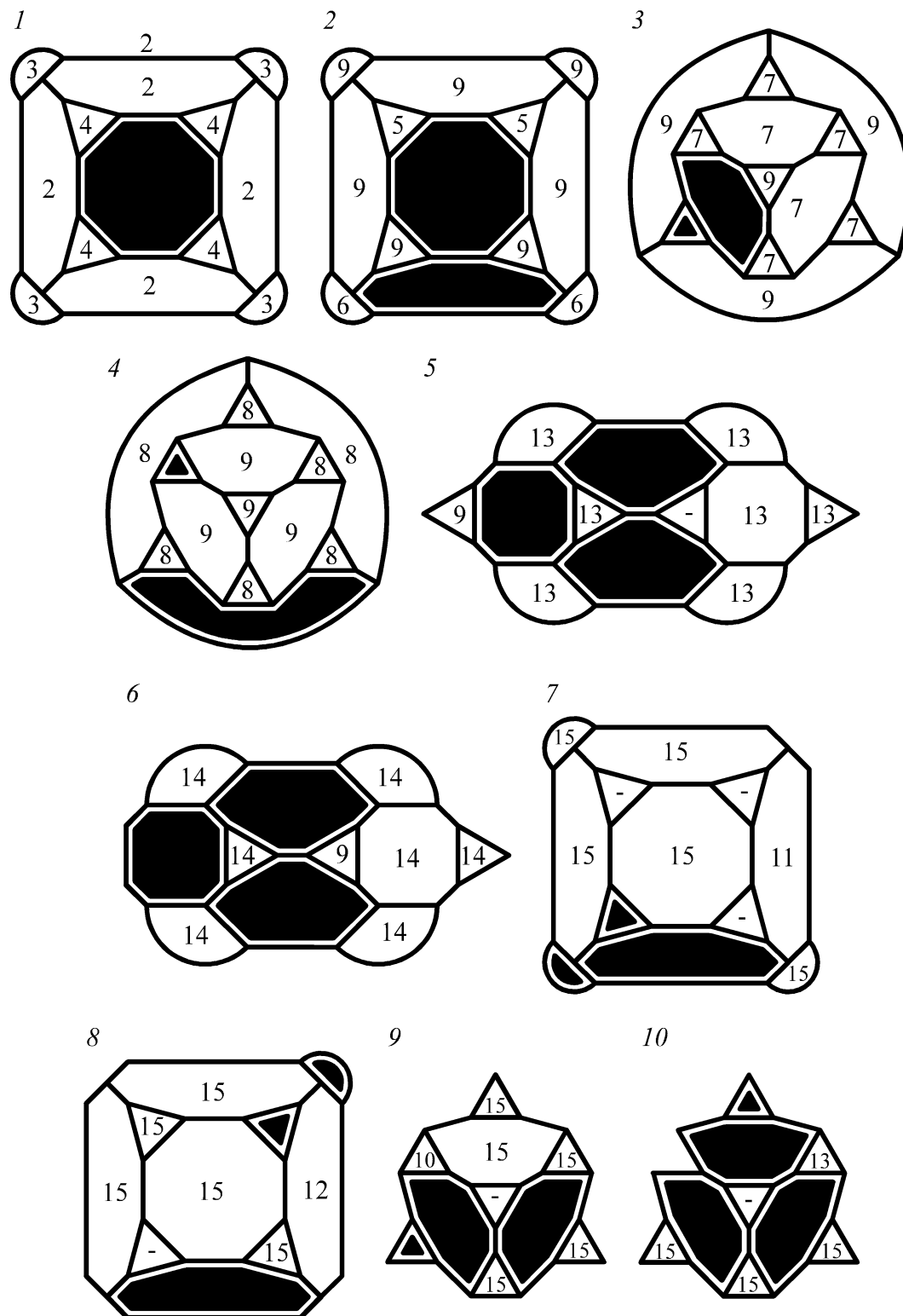
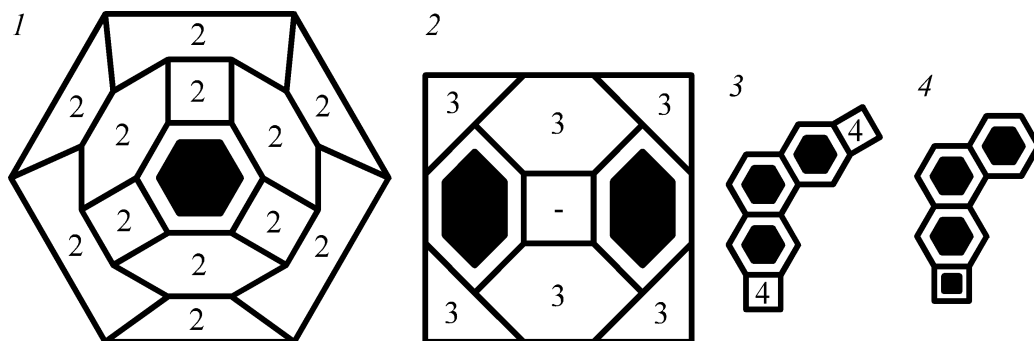
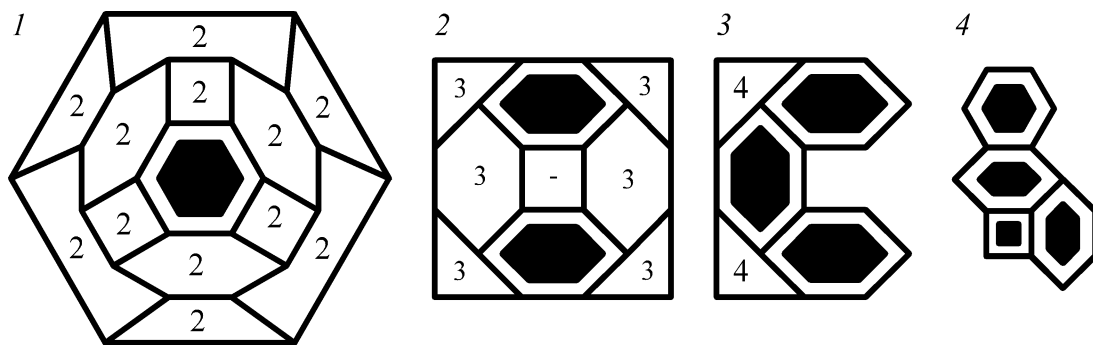
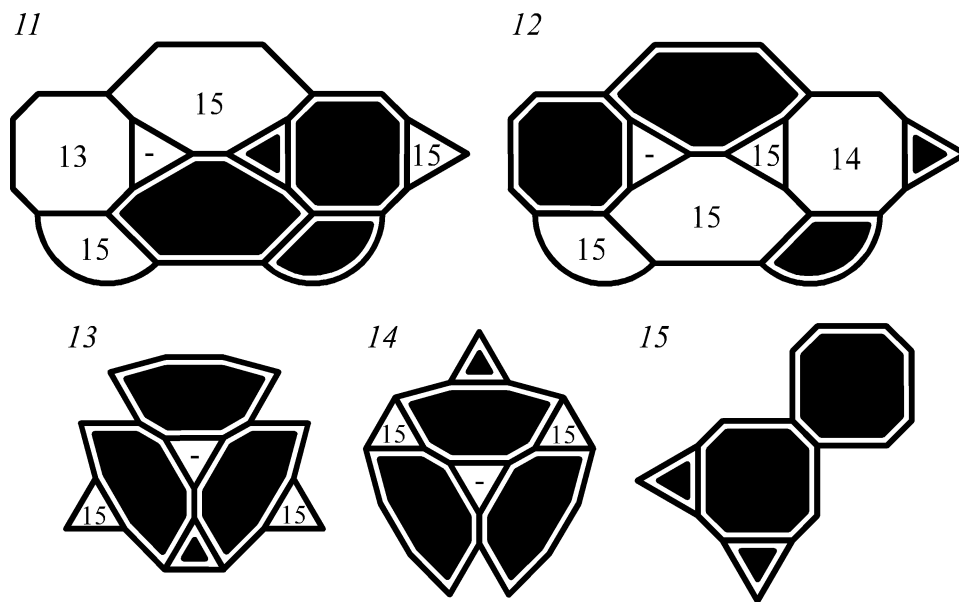


Abbildung 25: Aufbaustrategie, abgestumpfter Würfel, Teil 1.



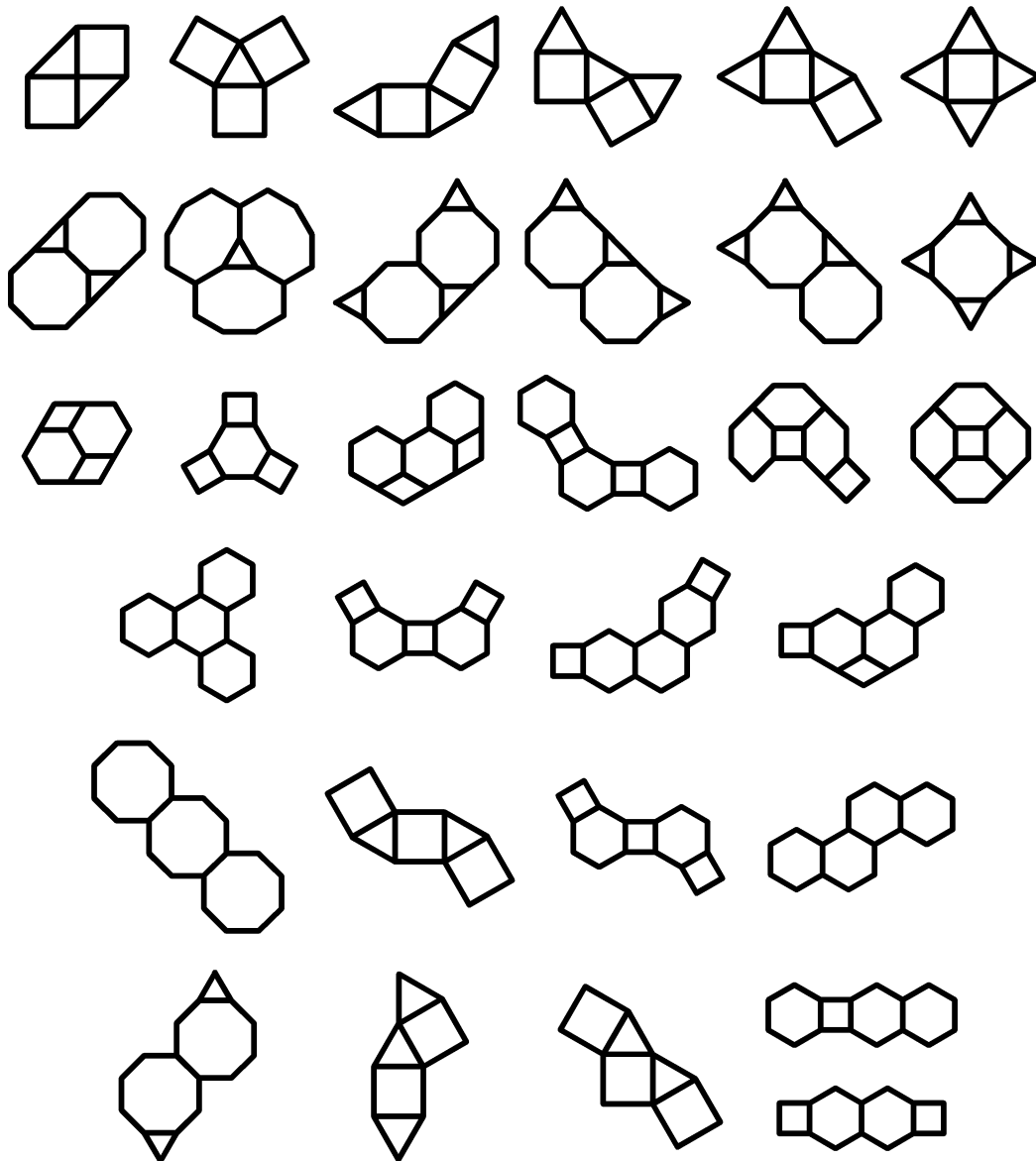


Abbildung 29: Elementare Verlierer, abgestumpfter Würfel, Kuboktaeder und abgestumpftes Oktaeder.

Abbildung 29 zeigt die elementaren Verlierer. In den ersten drei Zeilen sind die sich entsprechenden Polyominoes untereinander angeordnet. Für die Polyominoes der ersten Zeile und die ersten drei Polyominoes der vierten Zeile sind Paareinteilungsstrategien in den Abbildungen 32 bis 39 dargestellt. Bei der Paareinteilung in Abbildung 33 ist zu beachten, daß sie abhängig vom ersten Zug des Spielers A vorgenommen wird. Dabei besetzt Spieler A in seinem ersten Zug eines der mit A gekennzeichneten Felder. Spieler B besetzt dann das mit B bezeichnete Feld und reagiert auf die nächsten Züge von A entsprechend der angegebenen Paare.

Für das vierte Polyomino in der vierten Zeile ist eine Verhinderungsstrategie in den Abbildungen 30 und 31 angegeben. Die Strategie besteht aus 29 Situationen jeweils

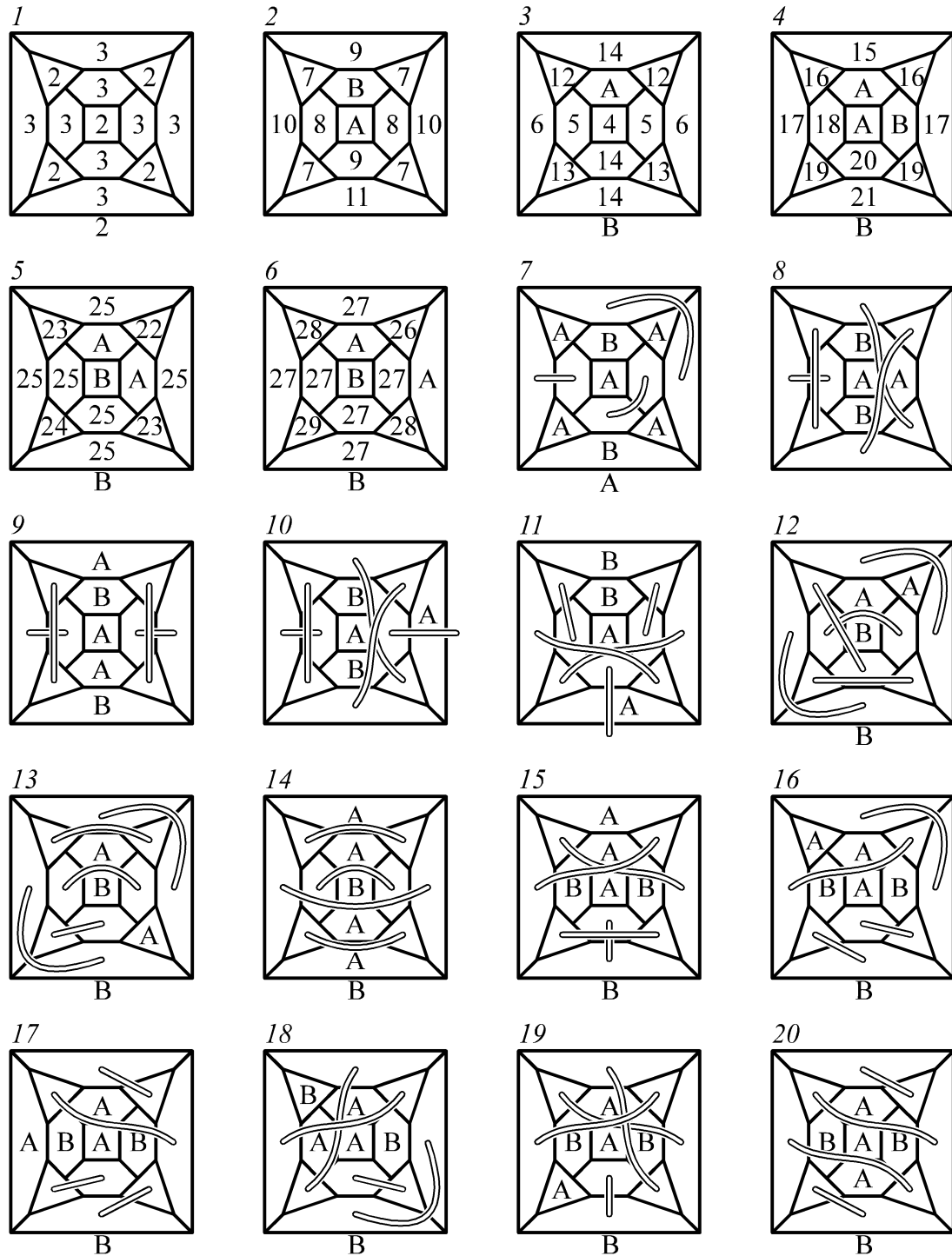


Abbildung 30: Verhinderungsstrategie, abgestumpftes Oktaeder, Teil 1.

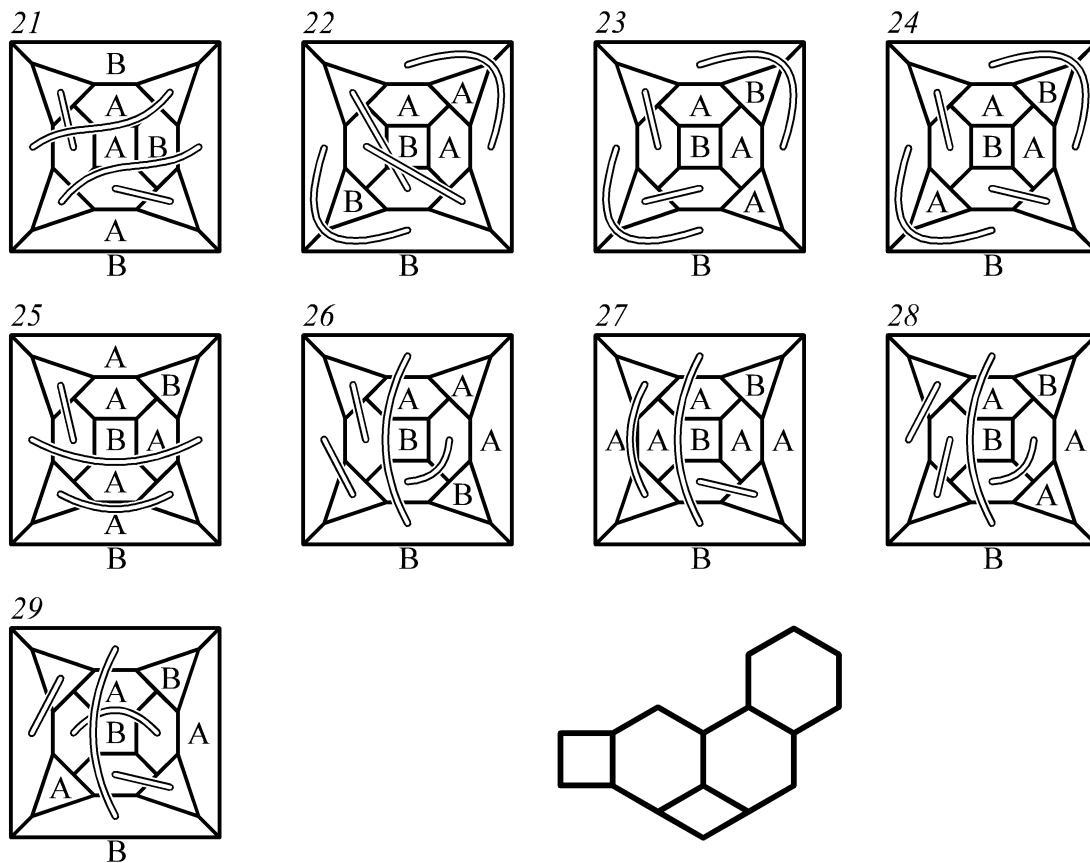


Abbildung 31: Verhinderungsstrategie, abgestumpftes Oktaeder, Teil 2.

vor dem nächsten Zug von Spieler A. Dabei müssen die mit B gekennzeichneten Felder bereits von Spieler B besetzt sein, und die mit A gekennzeichneten Felder dürfen von Spieler A besetzt sein. Setzt Spieler A auf ein mit einer Nummer gekennzeichnetes Feld, so kann Spieler B mit seinem nächsten Zug die entsprechende Situation erreichen. Setzt Spieler A auf ein Feld eines Paares, so besetzt Spieler B das andere Feld des Paares.

Die restlichen neun Polyominos in Abbildung 29 enthalten zwei sich auf dem Körper gegenüberliegende Felder. Spieler B kann also Spieler A am Aufbau des Polyominos hindern, indem er nach jedem Zug des Spielers A auf das gegenüberliegende Feld setzt.

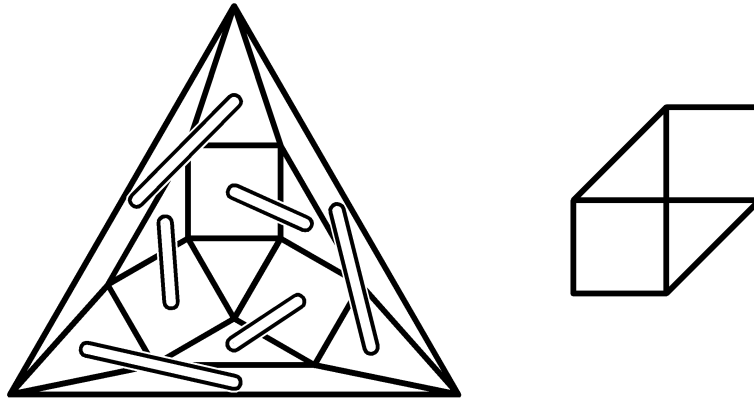


Abbildung 32: Paareinteilungsstrategie, Kuboktaeder.

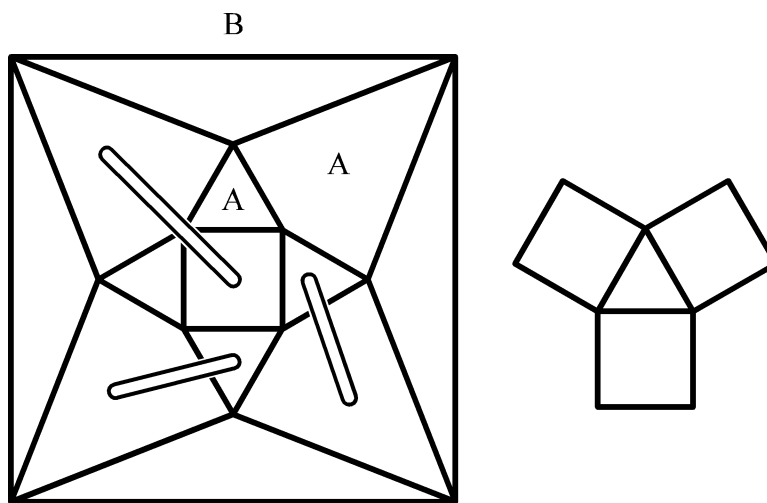


Abbildung 33: Paareinteilungsstrategie, Kuboktaeder.

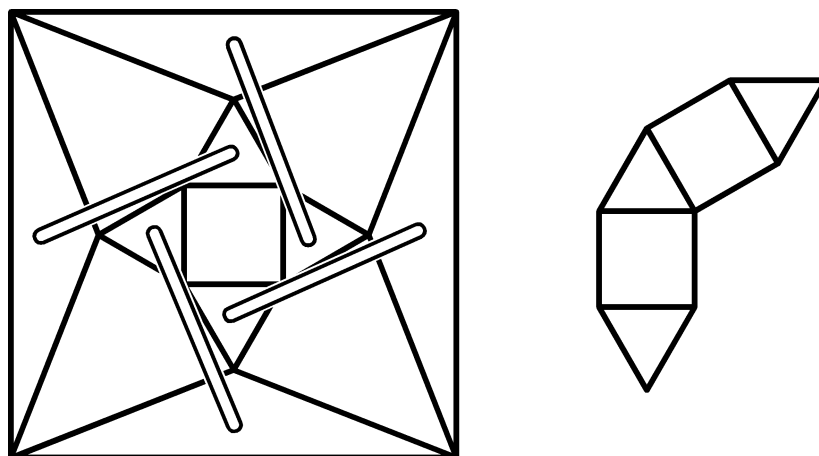


Abbildung 34: Paareinteilungsstrategie, Kuboktaeder.

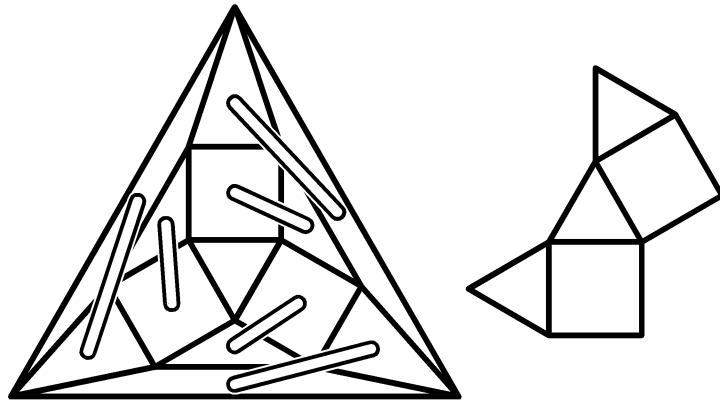


Abbildung 35: Paareinteilungsstrategie, Kuboktaeder.

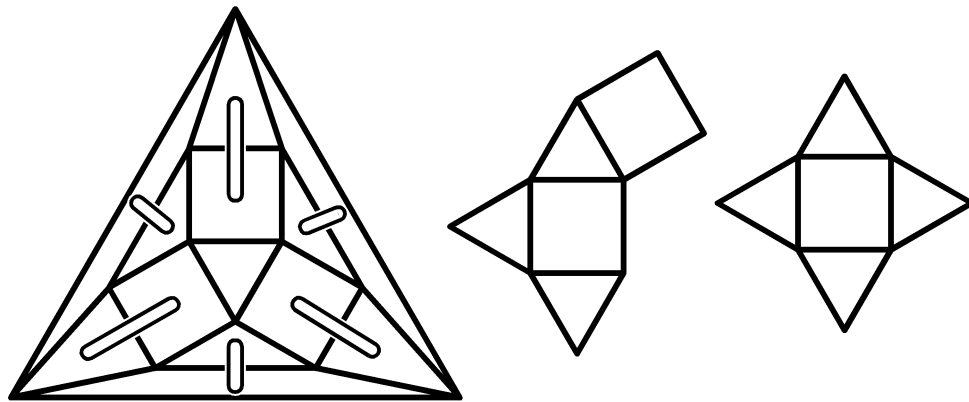


Abbildung 36: Paareinteilungsstrategie, Kuboktaeder.

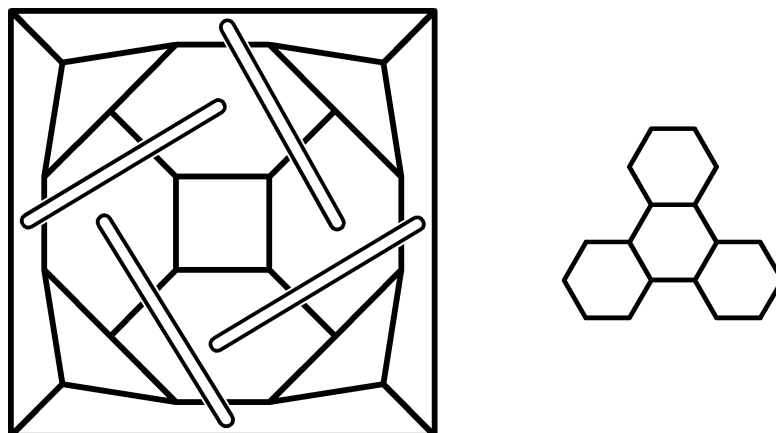


Abbildung 37: Paareinteilungsstrategie, abgestumpftes Oktaeder.

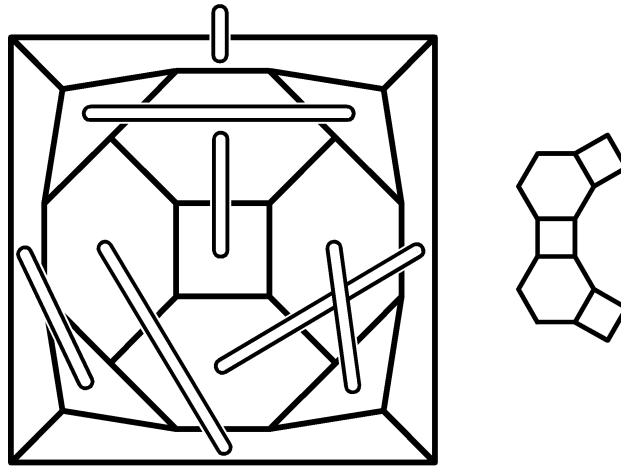


Abbildung 38: Paareinteilungsstrategie, abgestumpftes Oktaeder.

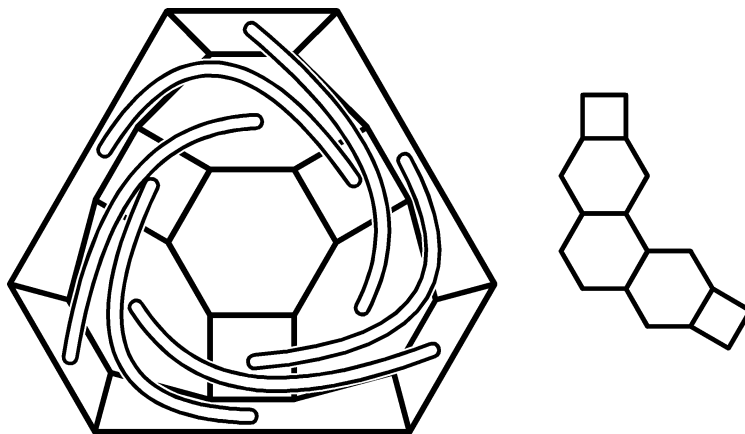


Abbildung 39: Paareinteilungsstrategie, abgestumpftes Oktaeder.

5.4 Rhombenkuboktaeder (3,4,4,4) und abgestumpftes Kuboktaeder (4,6,8)

Abbildung 40 zeigt das Rhombenkuboktaeder und das abgestumpfte Kuboktaeder. Die Tabellen 10 und 11 enthalten die Anzahlen ihrer Polyominos.

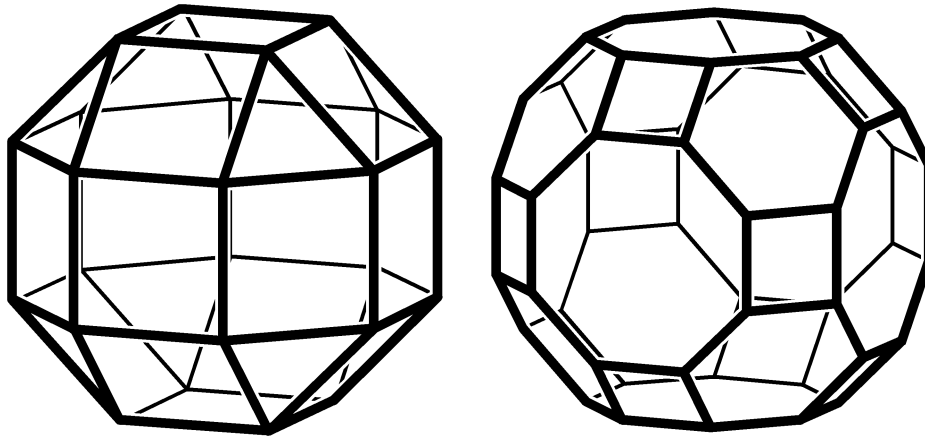


Abbildung 40: Das Rhombenkuboktaeder (3,4,4,4) und das abgestumpfte Kuboktaeder (4,6,8).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 25	3	8, 18	431
2, 24	2	9, 17	1055
3, 23	6	10, 16	2235
4, 22	11	11, 15	4206
5, 21	31	12, 14	6200
6, 20	67	13	7196
7, 19	183	Summe	36056

Tabelle 10: Anzahlen der Polyominos des Rhombenkuboktaeders.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 25	3	8, 18	2907
2, 24	3	9, 17	7876
3, 23	11	10, 16	17365
4, 22	27	11, 15	31267
5, 21	96	12, 14	44223
6, 20	289	13	49916
7, 19	982	Summe	260014

Tabelle 11: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Kuboktaeders.

Die Anzahlen derjenigen Polyominos, die sich mit Hilfe der Paareinteilungen mit den angegebenen Eigenschaften nicht als Verlierer nachweisen lassen, sind in Tabelle 12 enthalten (siehe Abschnitt 5.1).

Eckenfolge	(3,4,4,4)	(4,6,8)
Eigenschaften	(3,∞), (2,2)	(3,∞), (2,1)
Größe	Schranke	Schranke
1	3	3
2	2	3
3	6	11
4	8	24
5	6	52
6	0	53
7	0	4
≥ 8	0	0
Summe	25	150

Tabelle 12: Obere Schranken für die Anzahl der Gewinner.

5.5 Ikosidodekaeder (3,5,3,5), abgestumpftes Dodekaeder (3,10,10) und abgestumpftes Ikosaeder (5,6,6)

Abbildung 41 zeigt das abgestumpfte Ikosaeder, das Ikosidodekaeder und das abgestumpfte Dodekaeder. Die Tabellen 13 bis 15 enthalten die Anzahlen der Polyominos

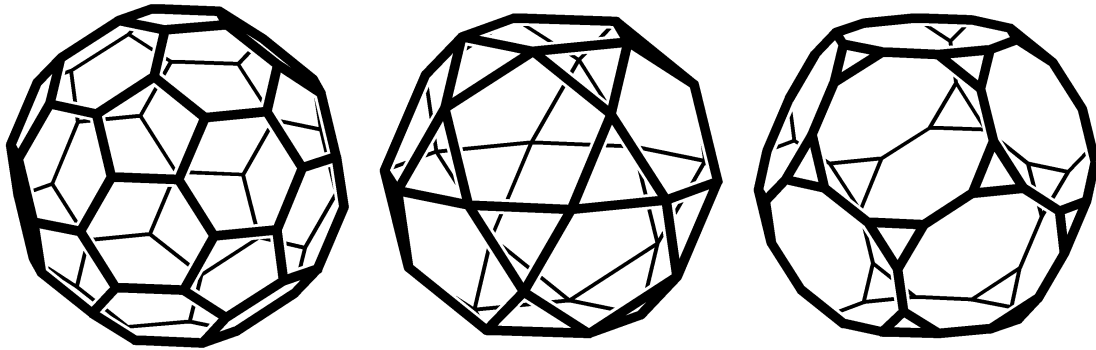


Abbildung 41: Das abgestumpfte Ikosaeder (5,6,6), das Ikosidodekaeder (3,5,3,5) und das abgestumpfte Dodekaeder (3,10,10).

des abgestumpften Ikosaeders, des Ikosidodekaeders und des abgestumpften Dodekaeders. Tabelle 16 enthält die Anzahlen derjenigen Polyominos, die sich mit Hilfe der Paareinteilungen mit den angegebenen Eigenschaften nicht als Verlierer nachweisen lassen (siehe Abschnitt 5.1).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 31	2	9, 23	806
2, 30	1	10, 22	2086
3, 29	3	11, 21	5094
4, 28	7	12, 20	11435
5, 27	17	13, 19	22501
6, 26	44	14, 18	37734
7, 25	116	15, 17	52140
8, 24	305	16	58325
		Summe	322907

Tabelle 13: Anzahlen der Polyominos des Ikosidodekaeders.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 31	2	9, 23	7818
2, 30	2	10, 22	19655
3, 29	6	11, 21	43022
4, 28	21	12, 20	82534
5, 27	68	13, 19	137557
6, 26	251	14, 18	199304
7, 25	858	15, 17	249140
8, 24	2758	16	268762
		Summe	1754754

Tabelle 14: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Dodekaeders.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 31	2	9, 23	5275
2, 30	2	10, 22	17445
3, 29	5	11, 21	53781
4, 28	14	12, 20	150324
5, 27	40	13, 19	363643
6, 26	132	14, 18	726900
7, 25	448	15, 17	1137217
8, 24	1548	16	1330401
		Summe	6243953

Tabelle 15: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Ikosaeders.

Eckenfolge	(3,5,3,5)	(3,10,10)	(5,6,6)
Eigenschaften	(5,∞), (3,3), (2,1)	(5,∞), (3,2), (2,1)	(5,∞), (3,3), (2,1)
Größe	Schranke	Schranke	Schranke
1	2	2	2
2	1	2	2
3	3	6	5
4	7	20	13
5	14	55	33
6	18	129	66
7	7	175	78
8	0	24	8
≥9	0	0	0
Summe	52	413	207

Tabelle 16: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner.

5.6 Abgeschrägter Würfel (3,3,3,3,4)

Der abgeschrägte Würfel ist in Abbildung 42 dargestellt. Tabelle 17 enthält die Anzahlen der Polyominos des abgeschrägten Würfels. Tabelle 18 enthält die Anzahlen

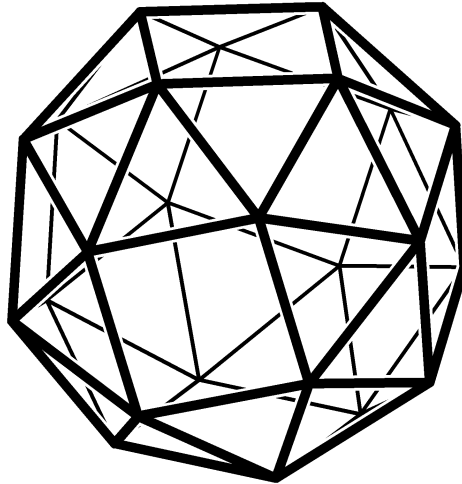


Abbildung 42: Der abgeschrägte Würfel (3,3,3,3,4).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1, 27	3	11, 27	9816
2, 36	3	12, 26	23100
3, 35	6	13, 25	52459
4, 34	16	14, 24	113193
5, 33	39	15, 23	226123
6, 32	101	16, 22	406219
7, 31	259	17, 21	635050
8, 30	660	18, 20	840814
9, 29	1652	19	925148
10, 28	4079	Summe	5552332

Tabelle 17: Anzahlen der Polyominos des abgeschrägten Würfels.

derjenigen Polyominos des abgeschrägten Würfels, die sich mit Hilfe der Paareinteilungen mit den angegebenen Eigenschaften nicht als Verlierer nachweisen lassen (siehe Abschnitt 5.1). Da alle 7 verbleibenden Polyominos Gewinner sind, ergeben sich die in Abbildung 43 dargestellten elementaren Gewinner und elementaren Verlierer. Diejenigen Dreiecke, die (auch auf dem Spielbrett) kein Viereck als Nachbar haben, sind zur Unterscheidung mit einem Kreis gekennzeichnet. Abbildungen 44 und 45 zeigen Aufbaustrategien für die beiden elementaren Gewinner.

Eigenschaften	$(6, \infty), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$
Größe	Schranke
1	3
2	2
3	2
≥ 4	0
Summe	7

Tabelle 18: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner.

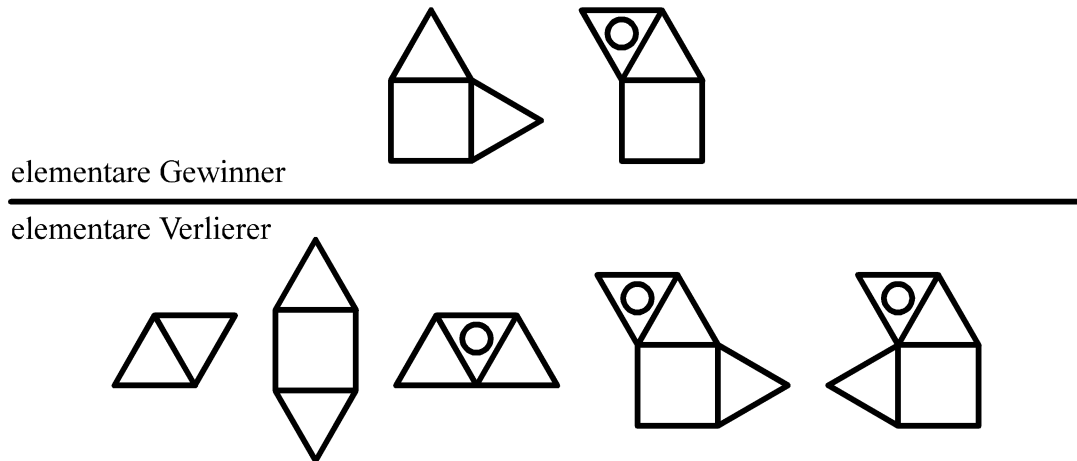


Abbildung 43: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,3,4).

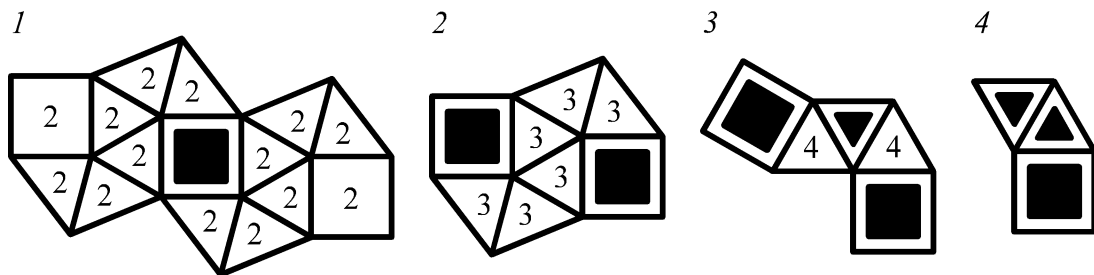


Abbildung 44: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,4).

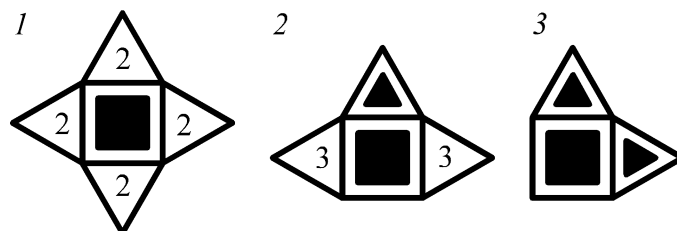


Abbildung 45: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,4).

5.7 Rhombenikosidodekaeder (3,4,5,4) und abgestumpftes Ikosidodekaeder (4,6,10)

Das Rhombenikosidodekaeder und das abgestumpfte Ikosidodekaeder sind in Abbildung 46 dargestellt. Die Tabellen 19 und 20 enthalten die Anzahlen der Polyominos des Rhombenikosidodekaeders und des abgestumpften Ikosidodekaeders.

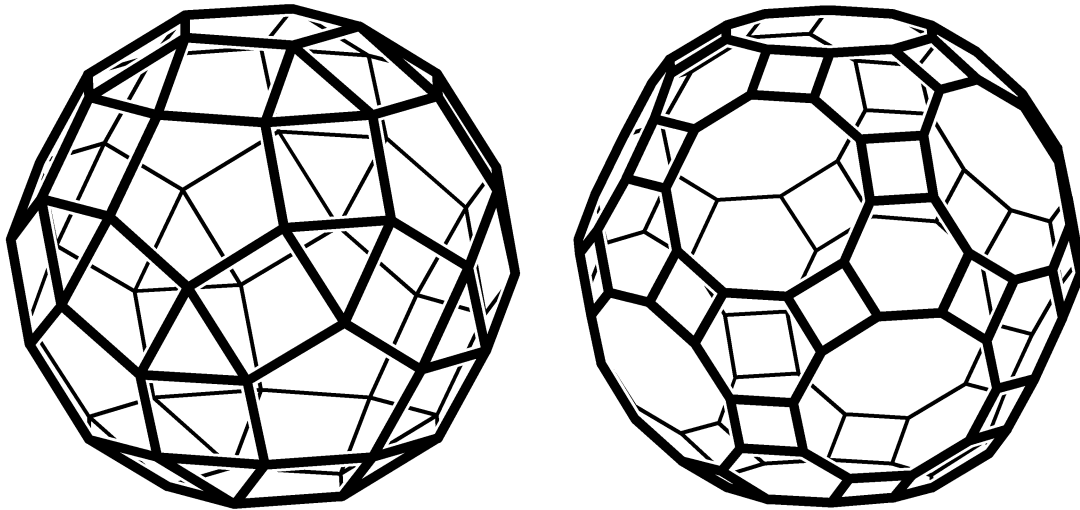


Abbildung 46: Das Rhombenikosidodekaeder (3,4,5,4) und das abgestumpfte Ikosidodekaeder (4,6,10)

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	9	4543
2	2	10	15350
3	6	11	52493
4	13	12	177710
5	42	13	599268
6	119	14	1995241
7	407	15	6548493
8	1321	16	21041157

Tabelle 19: Anzahlen der Polyominos des Rhombenikosidodekaeders.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	8	14715
2	3	9	68945
3	12	10	320038
4	37	11	1478491
5	162	12	6732026
6	683	13	30070182
7	3200		

Tabelle 20: Anzahlen der Polyominos des abgestumpften Ikosidodekaeders

Die Tabelle 21 enthält die Anzahlen derjenigen Polyominos, die sich mit Hilfe der Paareinteilungen mit den angegebenen Eigenschaften nicht als Verlierer nachweisen lassen (siehe Abschnitt 5.1).

Eckenfolge	(3,4,5,4)	(4,6,10)
Eigenschaften	(10,∞), (6,3), (5,2), (3,1)	(10,∞), (8,3), (6,2), (4,1)
Größe	Schranke	Schranke
1	3	3
2	2	3
3	6	12
4	11	35
5	24	140
6	29	498
7	8	1356
8	0	1485
9	0	456
10	0	5
≥ 11	0	0
Summe	83	3993

Tabelle 21: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner.

5.8 Abgeschrägtes Dodekaeder (3,3,3,3,5)

Das abgeschrägte Dodekaeder ist in Abbildung 47 gezeigt. Die Anzahlen der Polyominos des abgeschrägten Dodekaeders mit bis zu 16 Zellen sind in Tabelle 22 enthalten.

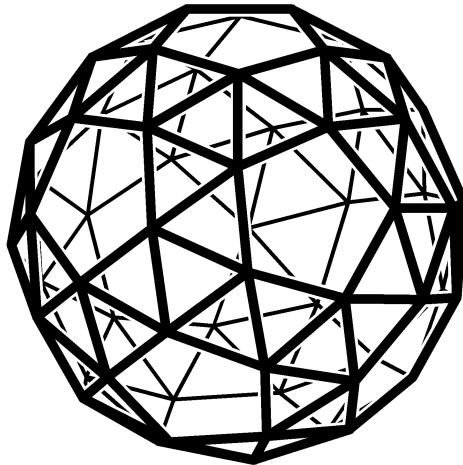


Abbildung 47: Das abgeschrägte Dodekaeder.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	9	4222
2	3	10	12825
3	6	11	38624
4	19	12	116429
5	51	13	349455
6	157	14	1047399
7	461	15	3129485
8	1403	16	9330377

Tabelle 22: Anzahlen der Polyominos des abgeschrägten Dodekaeders.

Die Anzahlen derjenigen Polyominos des abgeschrägten Dodekaeders, die sich mit Hilfe der Paareinteilungen mit den angegebenen Eigenschaften nicht als Verlierer nachweisen lassen, sind in Tabelle 23 enthalten (siehe Abschnitt 5.1). Von den 12 Polyominos sind 8 als Gewinner bekannt. Abbildung 48 zeigt die 4 ungelösten Fälle und die 3 bekannten Gewinner, die nicht in einem anderen bekannten Gewinner enthalten sind. Aufbaustrategien für diese Gewinner sind in den Abbildungen 49 bis 51 dargestellt.

Eigenschaften	(60,∞), (12,4), (10,3), (4,1)
Größe	Schranke
1	3
2	2
3	3
4	4
≥5	0
Summe	12

Tabelle 23: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner.

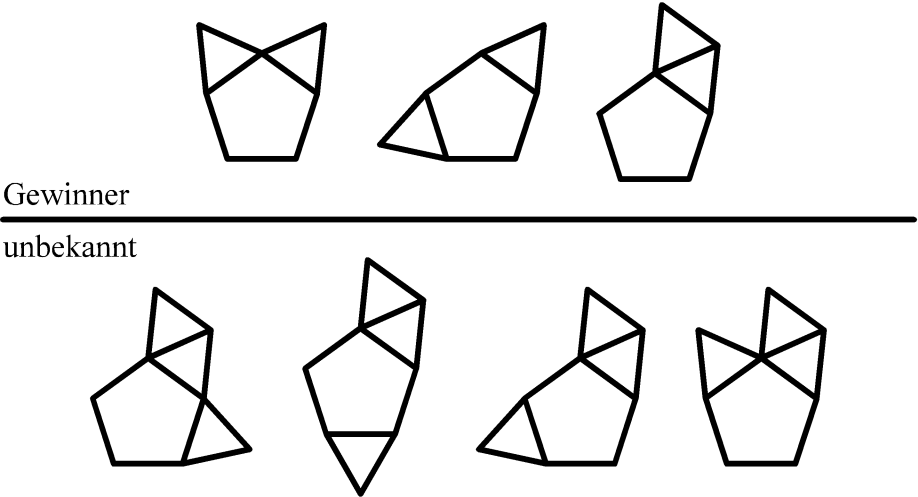


Abbildung 48: Maximale bekannte Gewinner und ungelöste Fälle.

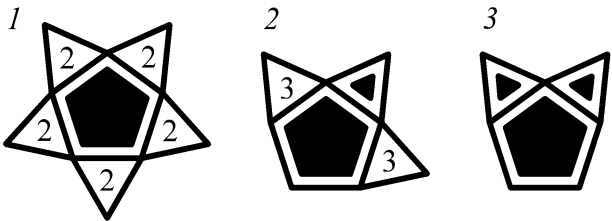


Abbildung 49: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,5).

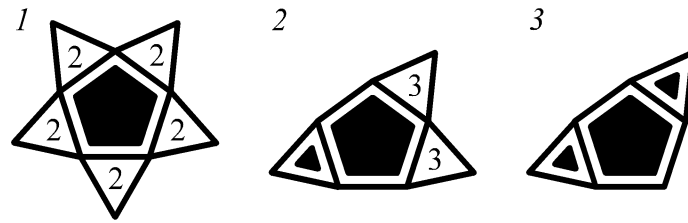


Abbildung 50: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,5).

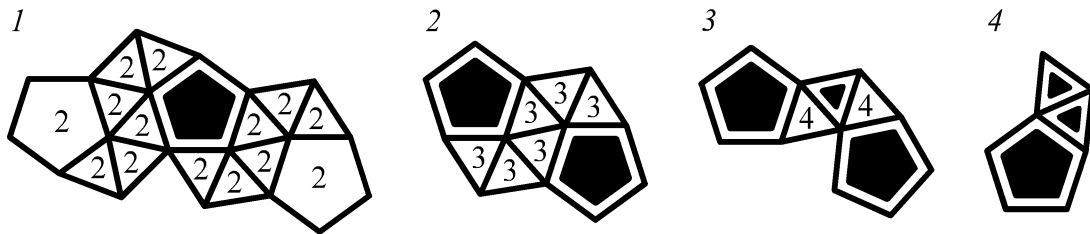


Abbildung 51: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,5).

5.9 Archimedische Prismen (4,4, n)

Archimedische Prismen sind die archimedischen Körper mit den Eckenfolgen (3,4,4) und (4,4, n) für $n \geq 5$. Abbildung 52 zeigt die drei kleinsten archimedischen Prismen. Tabelle 24 enthält die Anzahlen der Polyminos für diese Prismen. In den folgenden

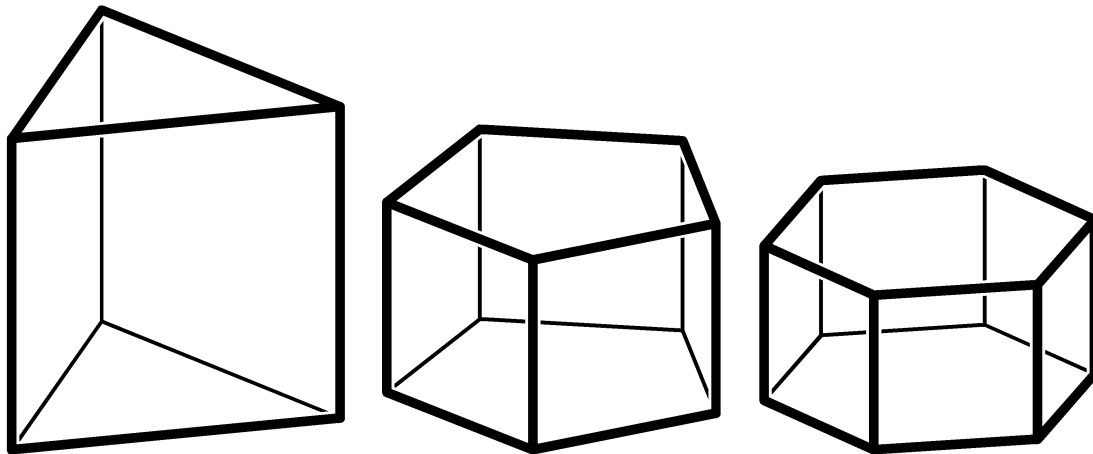


Abbildung 52: Archimedische Prismen, Eckenfolgen (3,4,4), (4,4,5) und (4,4,6).

Abschnitten sind die Mengen der Gewinner und Verlierer für diese drei archimedischen Prismen vollständig bestimmt.

Größe	Eckenfolge		
	(3,4,4)	(4,4,5)	(4,4,6)
1	2	2	2
2	2	2	2
3	2	4	5
4	2	4	5
5		2	5
6		2	2
7			2
Summe	8	16	23

Tabelle 24: Anzahlen der Polyominos.

5.9.1 Eckenfolge (3,4,4)

Abbildung 53 zeigt den elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Prisma mit der Eckenfolge (3,4,4).

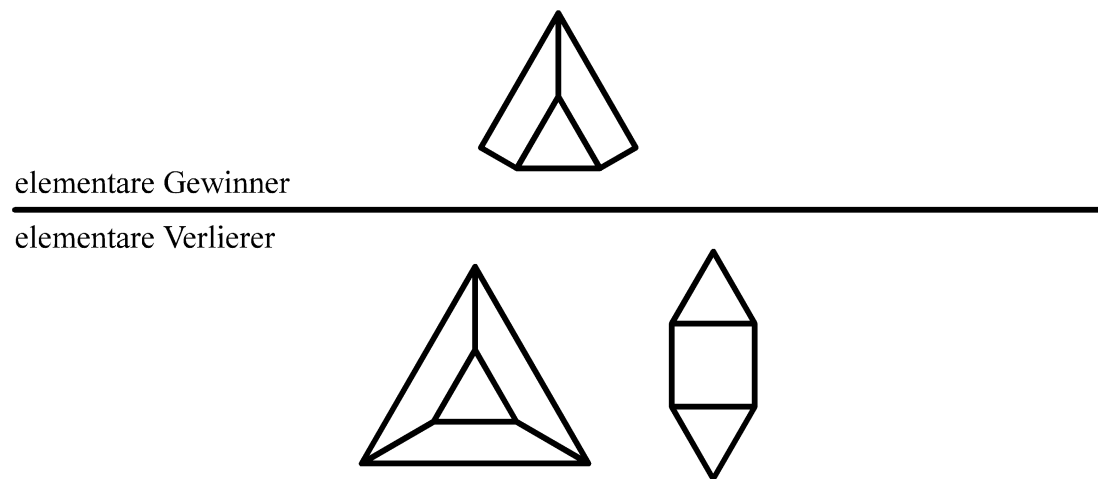


Abbildung 53: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,4,4).

Abbildung 54 zeigt eine Aufbaustrategie für den elementaren Gewinner und Abbildung 55 zeigt eine Paareinteilungsstrategie für die elementaren Verlierer.

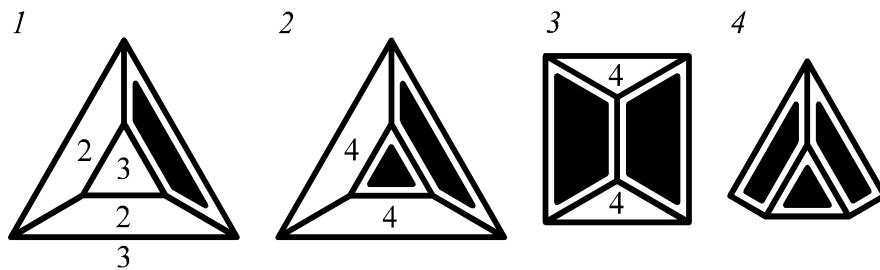


Abbildung 54: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,4,4).

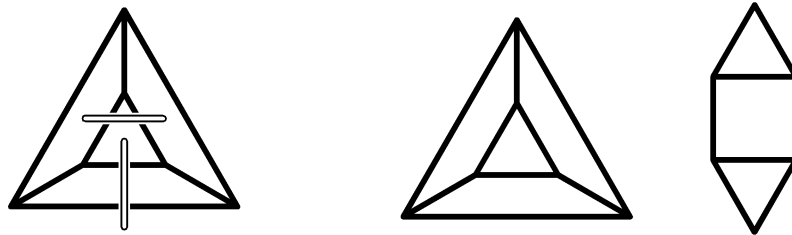


Abbildung 55: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,4,4).

5.9.2 Eckenfolge (4,4,5)

Abbildung 56 zeigt die elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Prisma mit der Eckenfolge (4,4,5).

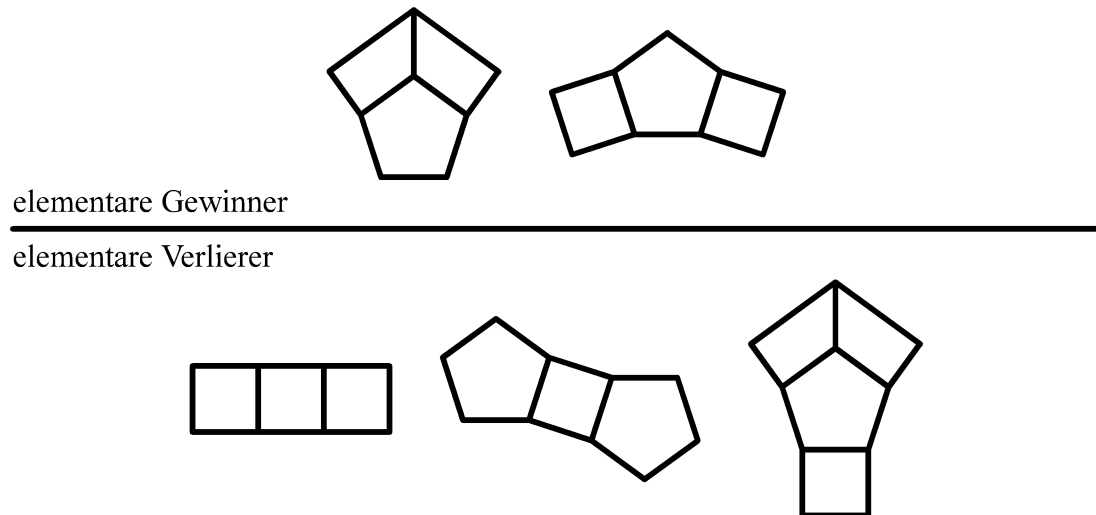


Abbildung 56: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (4,4,5).

Abbildungen 57 und 58 zeigen Aufbaustrategien für die elementaren Gewinner und Abbildungen 59 bis 61 zeigen Paareinteilungsstrategien für die elementaren Verlierer. Bei den Paareinteilungen in Abbildung 59 und 61 ist zu beachten, daß sie in Abhängigkeit vom ersten Zug des Spielers A gewählt werden. Spieler A besetzt dabei mit seinem

ersten Zug eines der beiden mit A gekennzeichneten Felder und Spieler B danach das mit B gekennzeichnete Feld. Auf alle weiteren Züge von Spieler A reagiert Spieler B gemäß der angegebenen Paare.

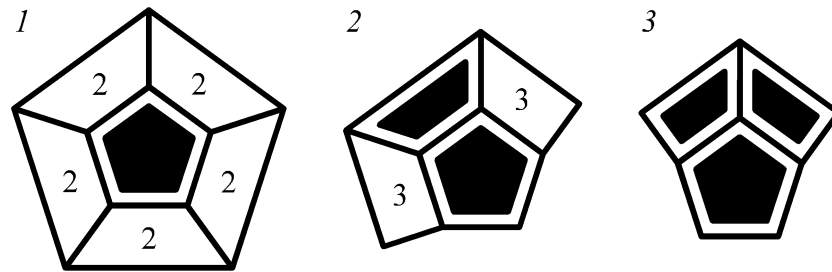


Abbildung 57: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(4,4,5)$.

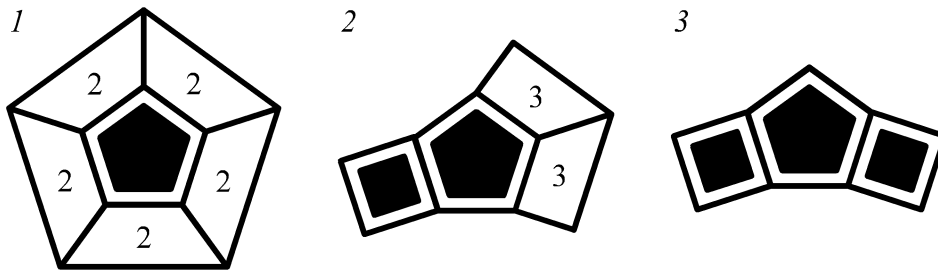


Abbildung 58: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(4,4,5)$.

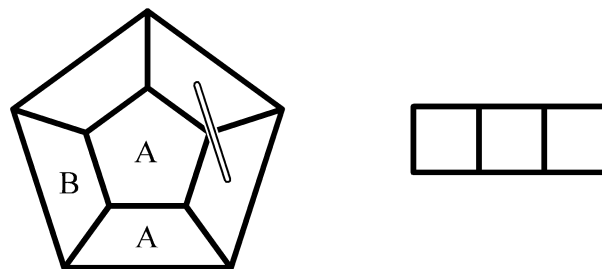


Abbildung 59: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(4,4,5)$.

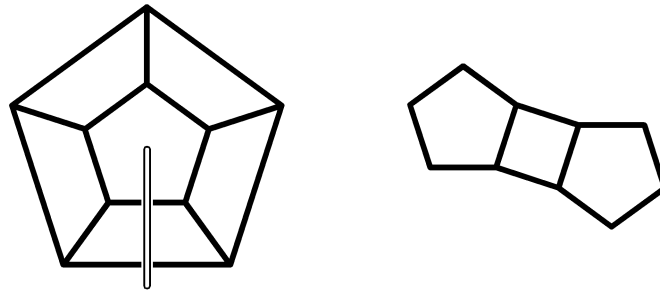


Abbildung 60: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (4,4,5).

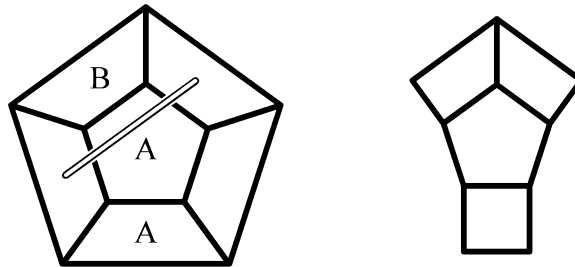
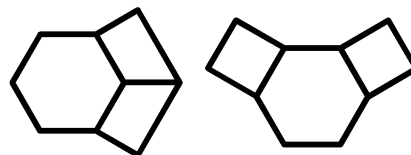


Abbildung 61: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (4,4,5).

5.9.3 Eckenfolge (4,4,6)

Abbildung 62 zeigt die elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Prisma mit der Eckenfolge (4,4,6).



elementare Gewinner

elementare Verlierer

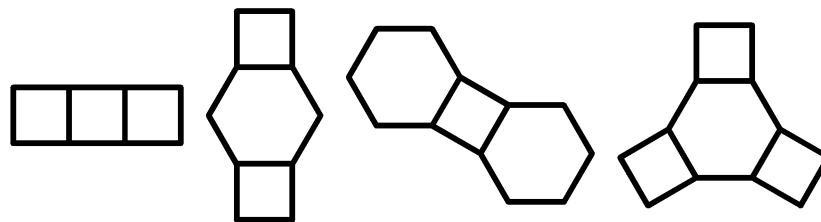


Abbildung 62: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (4,4,6).

Abbildungen 63 und 64 zeigen Aufbaustrategien für die elementaren Gewinner und Abbildungen 65 bis 67 zeigen Paareinteilungsstrategien für die elementaren Verlierer.

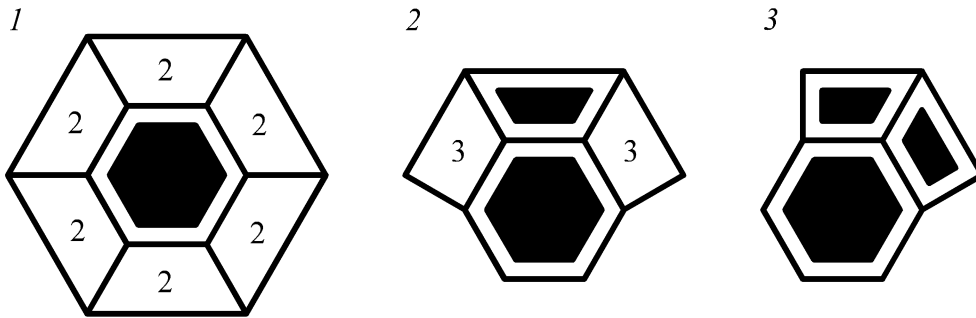


Abbildung 63: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(4,4,6)$.

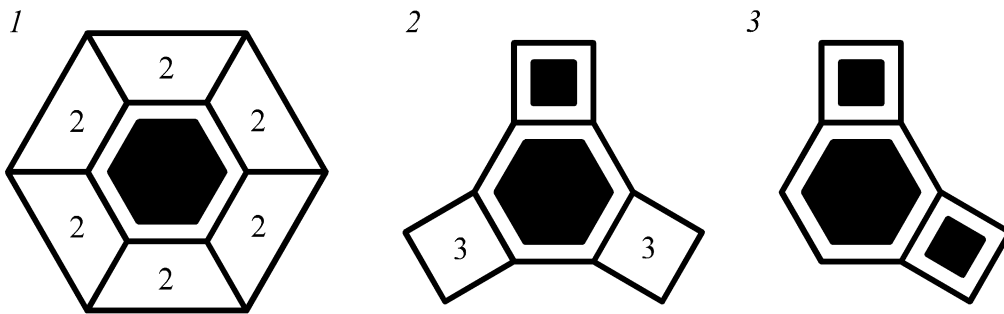


Abbildung 64: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(4,4,6)$.

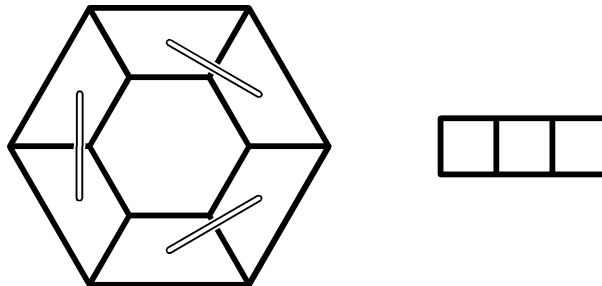


Abbildung 65: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(4,4,6)$.

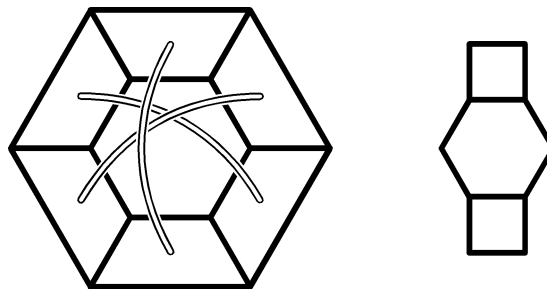


Abbildung 66: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(4,4,6)$.

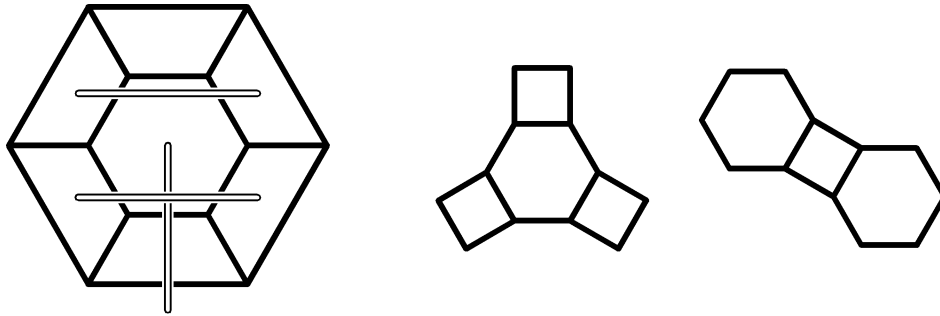


Abbildung 67: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (4,4,6).

5.10 Archimedische Antiprismen (3,3,3, n)

Archimedische Antiprismen sind die archimedischen Körper mit den Eckenfolgen (3,3,3, n) für $n \geq 4$. Abbildung 68 zeigt die archimedischen Antiprismen mit $n=4$, 5 und 6. Tabelle 25 enthält die Anzahlen der Polyominos für diese Antiprismen. Die

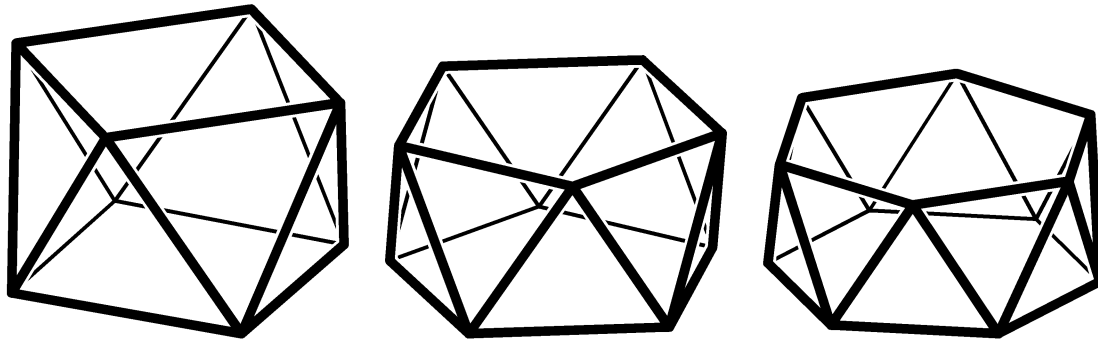


Abbildung 68: Archimedische Antiprismen.

Anzahlen der Polyominos mit mehr als 7 Zellen ergeben sich durch die Tatsache, daß das Komplement eines Polyominos wieder ein Polyomino ist. In den folgenden Abschnitten sind die Mengen der Gewinner und Verlierer für diese drei archimedischen Antiprismen vollständig bestimmt.

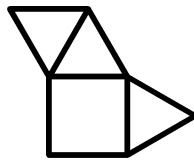
5.10.1 Eckenfolge (3,3,3,4)

Abbildung 69 zeigt den elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Antiprisma mit der Eckenfolge (3,3,3,4).

Abbildung 70 zeigt eine Aufbaustrategie für den elementaren Gewinner und Abbildungen 71 und 72 zeigen Paareinteilungsstrategien für die elementaren Verlierer.

Größe	Eckenfolge		
	(3,3,3,4)	(3,3,3,5)	(3,3,3,6)
1	2	2	2
2	2	2	2
3	4	4	5
4	7	9	11
5	9	13	21
6	7	17	30
7	4	13	37
Summe	39	77	179

Tabelle 25: Anzahlen der Polyominos.



elementare Gewinner

elementare Verlierer

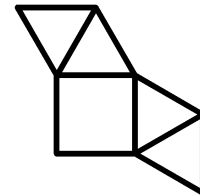
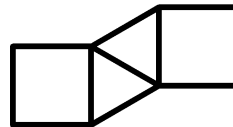


Abbildung 69: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,4).

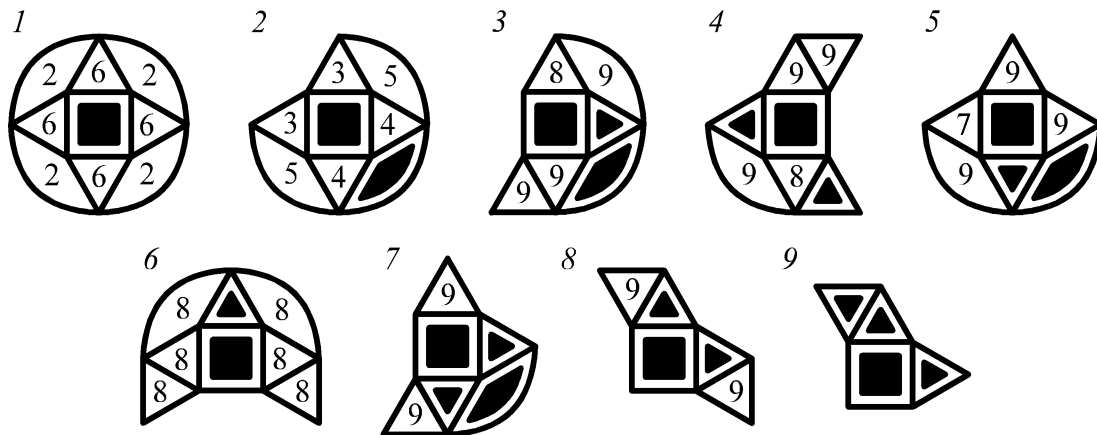


Abbildung 70: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,4).

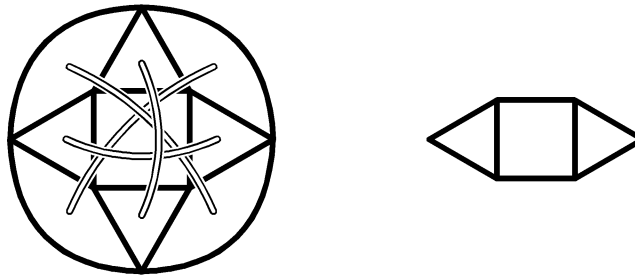


Abbildung 71: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,4).

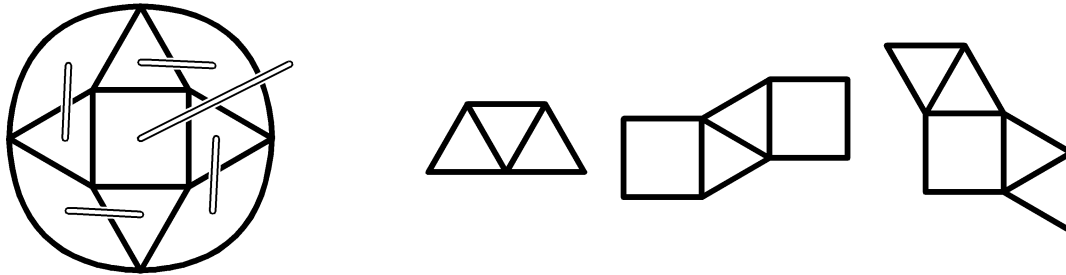


Abbildung 72: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,4).

5.10.2 Eckenfolge (3,3,3,5)

Abbildung 73 zeigt die elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Antiprisma mit der Eckenfolge (3,3,3,5).

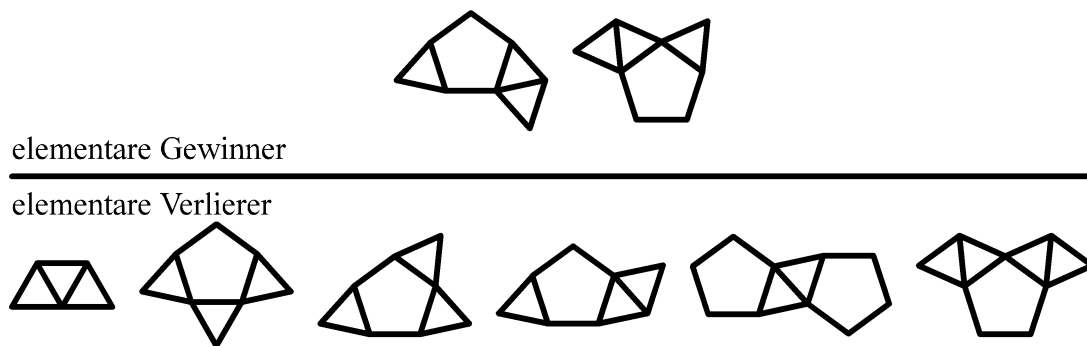


Abbildung 73: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,5).

Abbildung 74 und 75 zeigen Aufbaustrategien für die elementaren Gewinner und Abbildungen 76 bis 78 zeigen Paareinteilungsstrategien für die elementaren Verlierer.

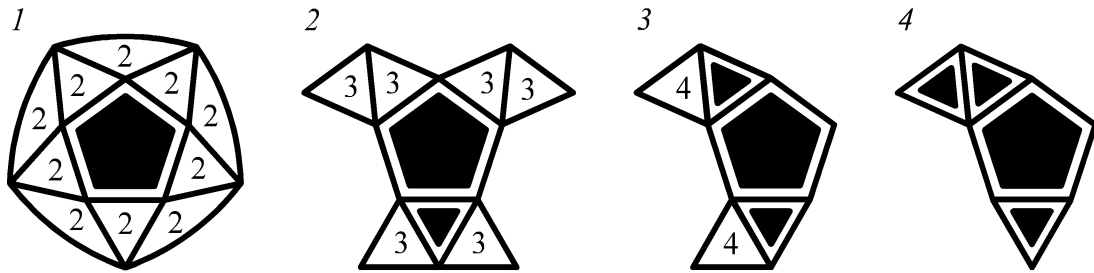


Abbildung 74: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(3,3,3,5)$.

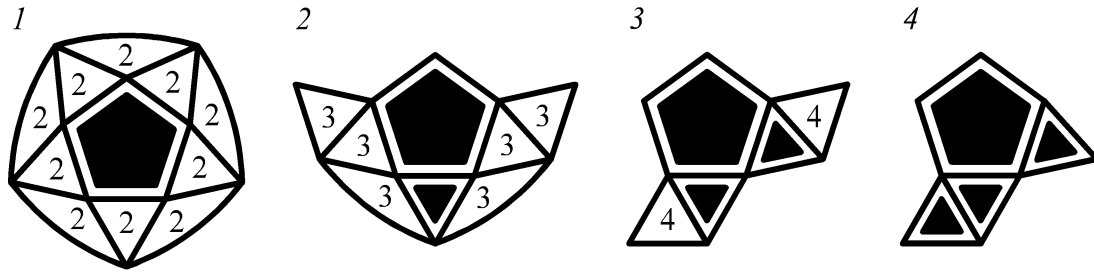


Abbildung 75: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(3,3,3,5)$.

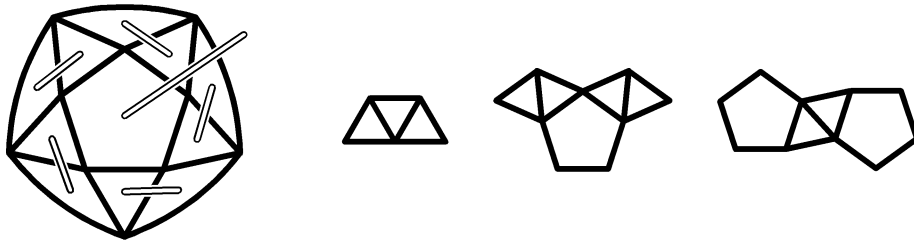


Abbildung 76: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(3,3,3,5)$.

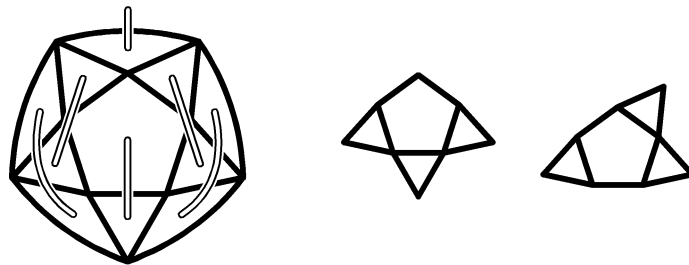


Abbildung 77: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(3,3,3,5)$.

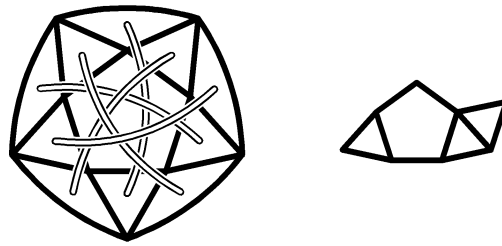


Abbildung 78: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,5).

5.10.3 Eckenfolge (3,3,3,6)

Abbildung 79 zeigt die elementaren Gewinner und die elementaren Verlierer auf dem archimedischen Antiprisma mit der Eckenfolge (3,3,3,6).

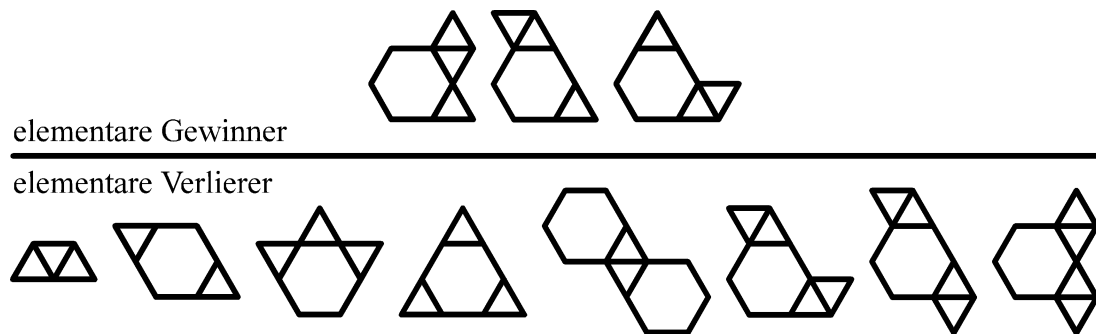


Abbildung 79: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,6).

Abbildungen 80 bis 82 zeigen Aufbaustrategien für die elementaren Gewinner und Abbildungen 83 bis 87 zeigen Paareinteilungsstrategien für die elementaren Verlierer. Bei der Paareinteilung in Abbildung 87 ist zu beachten, daß sie in Abhängigkeit vom ersten Zug des Spielers A gewählt wird. Spieler A besetzt dabei mit seinem ersten Zug eines der beiden mit A gekennzeichneten Felder und Spieler B danach das mit B gekennzeichnete Feld. Auf alle weiteren Züge von Spieler A reagiert Spieler B gemäß der angegebenen Paare.

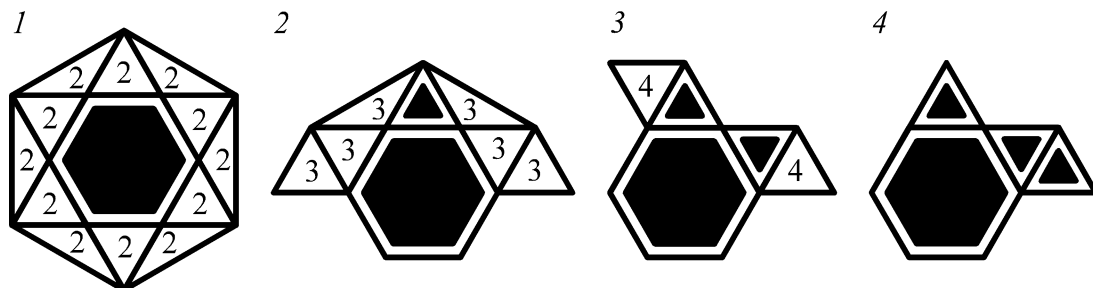


Abbildung 80: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,6).

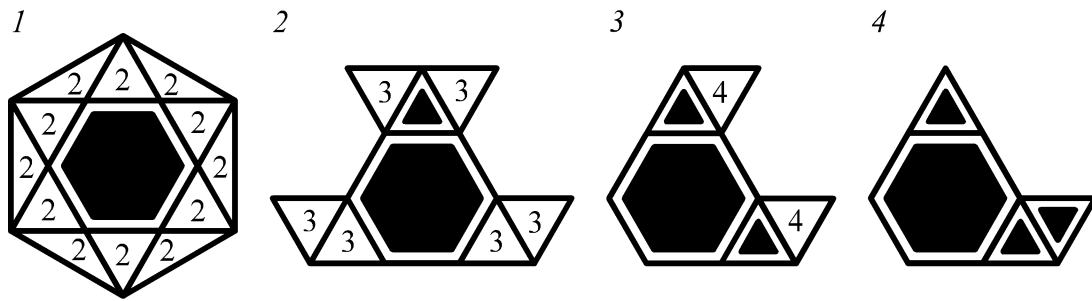


Abbildung 81: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(3,3,3,6)$.

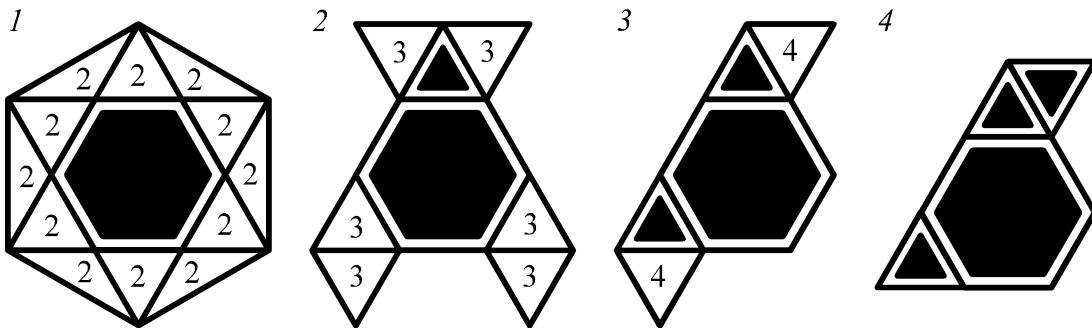


Abbildung 82: Aufbaustrategie, Eckenfolge $(3,3,3,6)$.

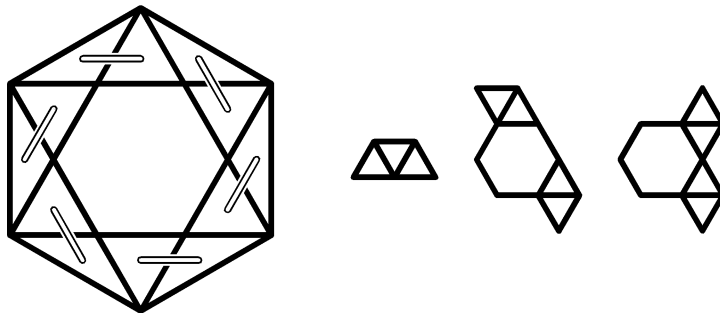


Abbildung 83: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(3,3,3,6)$.

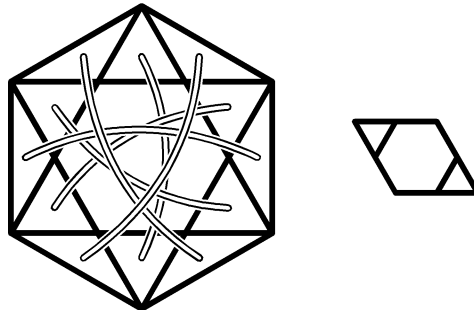


Abbildung 84: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge $(3,3,3,6)$.

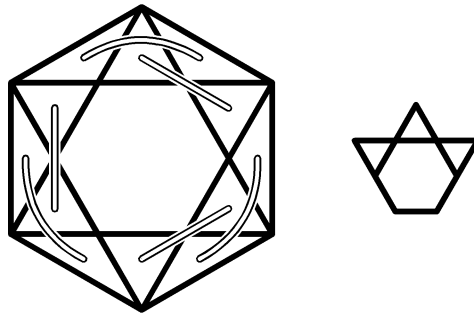


Abbildung 85: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,6).

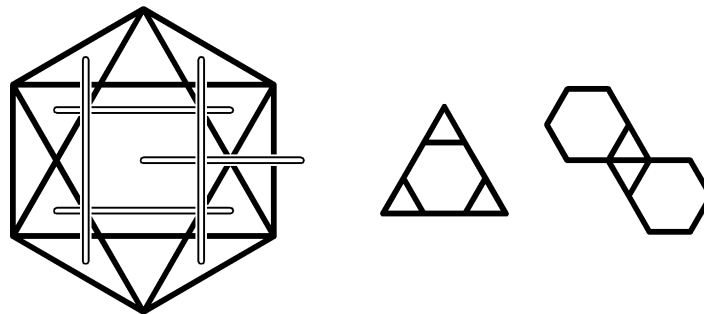


Abbildung 86: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,6).

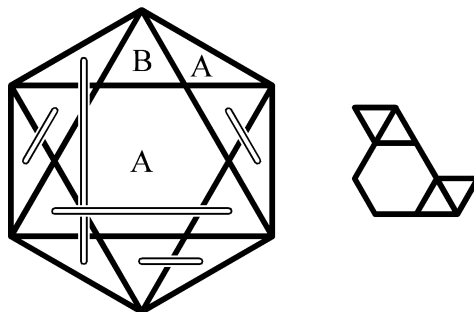


Abbildung 87: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,6).

5.11 Pseudo-Rhombenkuboktaeder

Das Rhombenkuboktaeder und das Pseudo-Rhombenkuboktaeder sind in Abbildung 88 gezeigt. Beide Körper haben die Eckenfolge $(3,4,4,4)$, jedoch ist das Pseudo-Rhom-

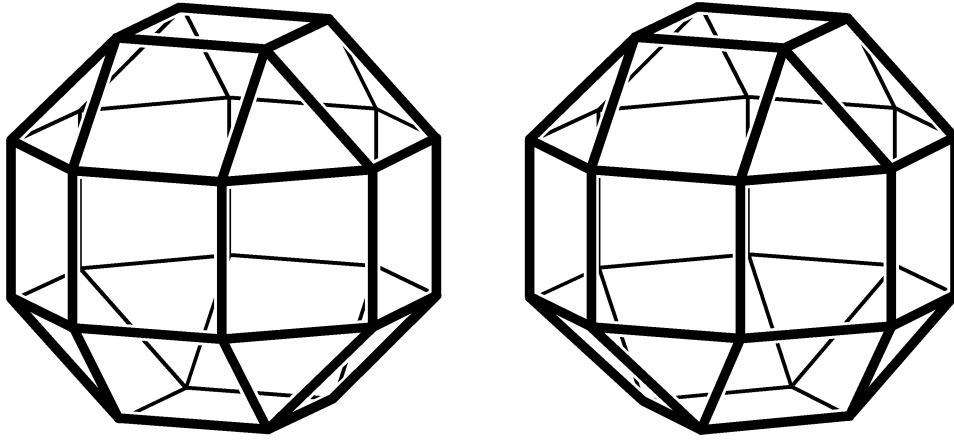


Abbildung 88: Das Rhombenkuboktaeder und das Pseudo-Rhombenkuboktaeder.

benkuboktaeder kein archimedischer Körper, da es verschiedene Arten von Ecken gibt, was der Definition der Mosaik-Graphen (siehe Abschnitt 2.1) widerspricht. So sind die 8 Ecken der beiden Quadrate, die keine Kante mit einem Dreieck gemeinsam haben, von den restlichen Ecken zu unterscheiden.

6 Euklidische Parkettierungen

Euklidische Parkettierungen sind die ebenen regulären Mosaik-Graphen. In Abbildung 89 sind Ausschnitte der 3 euklidischen Parkettierungen dargestellt.

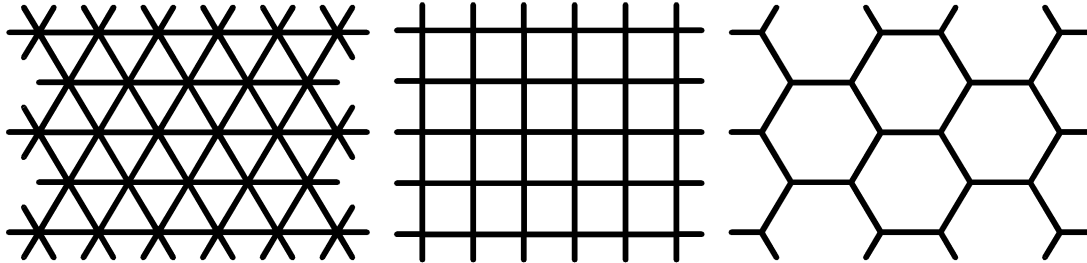


Abbildung 89: Die 3 euklidischen Parkettierungen.

Für das Dreieck-Gitter ist die Frage nach Gewinnern und Verlierern vollständig gelöst. Für das Viereck-Gitter bleibt diese Frage für ein Polyomino und beim Sechseck-Gitter für 5265 Polyominos ungelöst.

6.1 Dreieck-Gitter (3,3,3,3,3,3)

Tabelle 26 enthält die Anzahlen der Polyominos des Dreieck-Gitters mit bis zu 18 Zellen. Abbildung 90 zeigt die Gewinner und die elementaren Verlierer des Dreieck-Gitters. Sie wurden bereits in [14] bestimmt.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	1	6	12	11	1161	16	189309
2	1	7	24	12	3226	17	528922
3	1	8	66	13	8785	18	1484738
4	3	9	159	14	24453		
5	4	10	444	15	67716		

Tabelle 26: Anzahlen der Polyominos des Dreieck-Gitters.

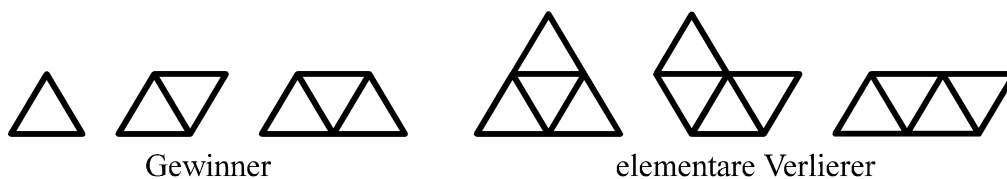


Abbildung 90: Gewinner und elementare Verlierer, Dreieck-Gitter.

6.2 Quadrat-Gitter (4,4,4,4)

Die Anzahlen der Polyominos des Quadrat-Gitters mit bis zu 26 Zellen sind in Tabelle 27 enthalten ([22] Folge A000104). In Abbildung 91 sind die bekannten Ergebnisse

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	1	10	4460	19	599563893
2	1	11	16094	20	2269506062
3	2	12	58937	21	8609442688
4	5	13	217117	22	32725637373
5	12	14	805475	23	124621833354
6	35	15	3001127	24	475368834568
7	107	16	11230003	25	1816103345752
8	363	17	42161529	26	6948228104703
9	1248	18	58781106		

Tabelle 27: Anzahlen der Polyominos des Quadrat-Gitters.

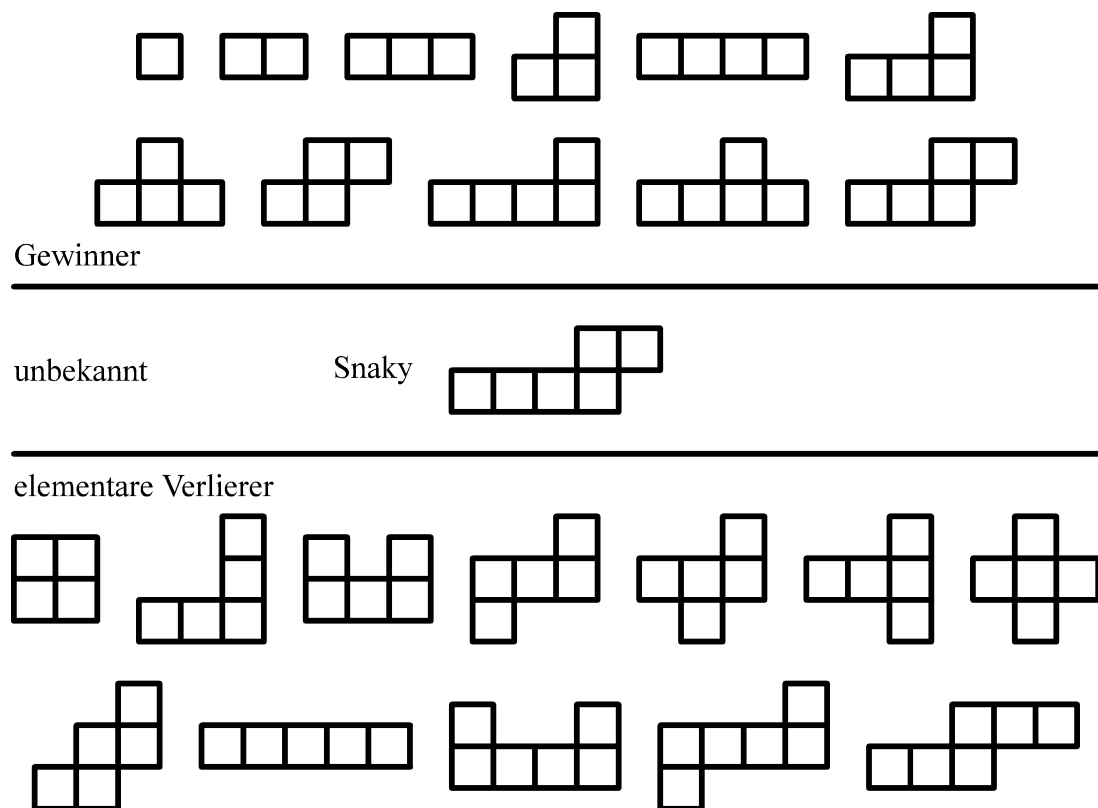


Abbildung 91: Gewinn, Snaky und elementare Verlierer, Quadrat-Gitter.

für das Quadrat-Gitter dargestellt ([5, 6, 10, 15]). Nur für das Polyomino mit dem Namen Snaky ist es noch nicht bekannt, ob es ein Gewinner oder Verlierer ist. Es wurde

jedoch bereits gezeigt, daß Snaky ein Verlierer ist, wenn Spieler A nur Felder besetzen darf, die zu bereits von A besetzten Felder benachbart sind ([17]). Darf Spieler B nur Paareinteilungsstrategien verwenden, so ist Snaky ein Gewinner ([18]).

Ist Snaky ein Gewinner, so gibt es 2 elementare Gewinner und 12 elementare Verlierer. Ist es ein Verlierer, so gibt es 3 elementare Gewinner und 13 elementare Verlierer.

6.3 Sechseck-Gitter (6,6,6)

Die Frage nach Gewinnern und Verlierern des Sechseck-Gitters wurde bereits in [2] behandelt. Es wurden dort 27 Gewinner bestimmt, für 13911 Polyominos konnte die Frage jedoch noch nicht beantwortet werden. Durch Veränderung der Methoden und intensiveren Computereinsatz wurde die Zahl der ungeklärten Fälle jetzt auf 5265 reduziert.

Tabelle 28 enthält die Anzahlen der Polyominos des Sechseck-Gitters bis zur Größe 17 ([22] Folge A018190).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	1	6	81	11	141229	16	359863778
2	1	7	331	12	669584	17	1751594643
3	3	8	1435	13	3198256		
4	7	9	6505	14	15367577		
5	22	10	30086	15	74207910		

Tabelle 28: Anzahlen der Polyominos des Sechseck-Gitters.

6.3.1 Verlierer

Mit Hilfe von Paareinteilungsstrategien soll jetzt eine obere Schranke für die Anzahl der Gewinner und eine obere Schranke für die Größe von Gewinnern bestimmt werden.

Die Paareinteilung in Abbildung 92 zeigt etwa, daß das mittlere Polyomino in Abbildung 98 ein Verlierer ist.

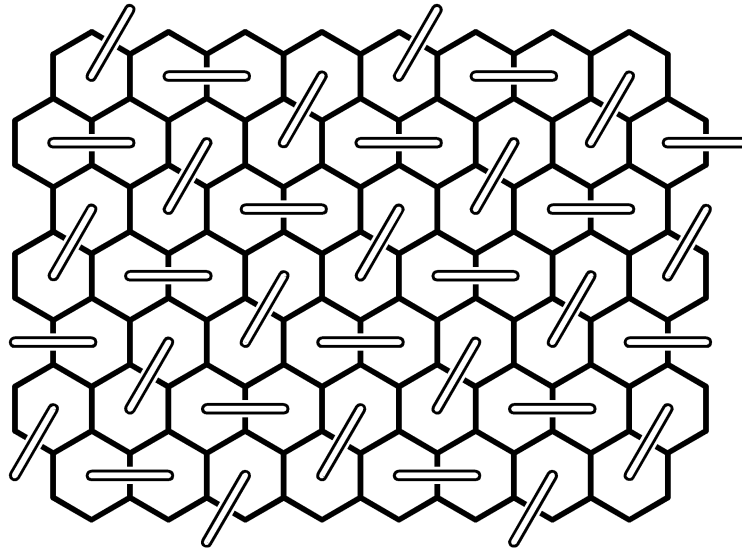


Abbildung 92: Paareinteilungsstrategie.

Zum Auffinden von Paareinteilungsstrategien auf dem Sechseck-Gitter werden die periodischen Paareinteilungen in endliche Klassen eingeteilt. Diese können dann systematisch untersucht werden.

Mit Hilfe eines Koordinatensystems wie in Abbildung 93 soll nun als erstes die *Periodizität* von Paareinteilungen definiert werden. Eine Paareinteilung heißt dabei

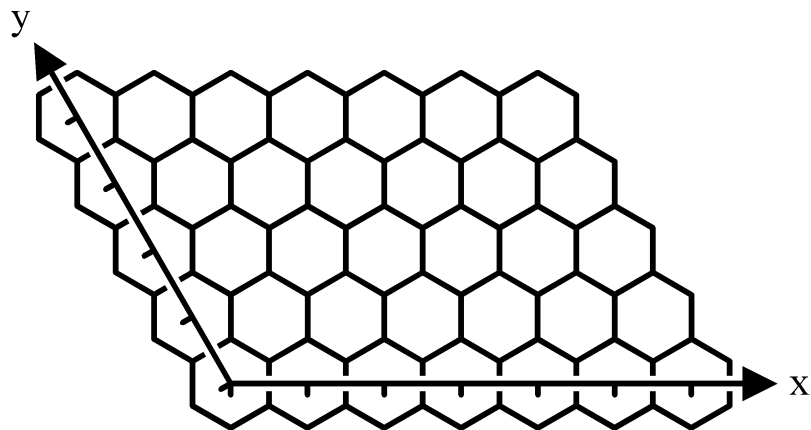


Abbildung 93: Koordinatensystem im Sechseck-Gitter.

periodisch, wenn sie durch zwei unabhängige Verschiebungen jeweils in sich selbst übergeht. Sie läßt sich dann also durch Angabe der beiden Verschiebungen und einer endlichen Anzahl der Paare eindeutig festlegen. Durch die Forderung, daß eine dieser Verschiebungen in Richtung der y -Achse verläuft, wird der Begriff der Periodizität nicht eingeschränkt. Insbesondere erhöht sich nicht die Anzahl der Paare, die zur Festlegung der Paareinteilung benötigt werden.

Eine Paareinteilung heißt nun (uv, v, w) -periodisch (mit $u, v > 0, w \geq 0$), wenn sie sowohl durch eine Verschiebung um v Felder in Richtung der y -Achse als auch durch eine Verschiebung um u Felder in Richtung der x -Achse und w Felder in Richtung der y -Achse in sich selbst übergeht. Die Paareinteilung in Abbildung 94 ist also sowohl

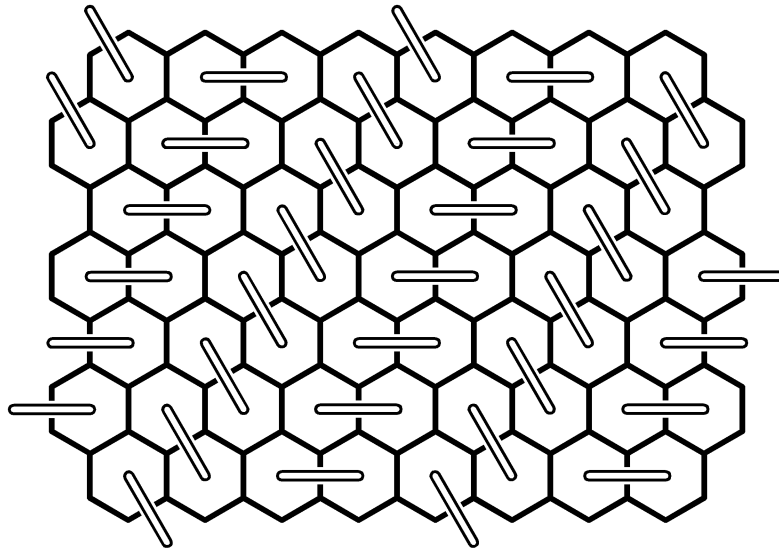


Abbildung 94: Paareinteilung mit minimaler Periodizität $(4,1,0)$.

$(4,4,1)$ - als auch $(24,4,2)$ -periodisch.

Um diese mehrfache Zuordnung zu vermeiden wird der Begriff der minimalen Periodizität eingeführt. Dieser soll auch berücksichtigen, daß das Verdrehen oder Spiegeln einer Paareinteilung keinen Einfluß auf ihre Eignung als Verhinderungsstrategie hat.

Als *minimale Periodizität* einer Paareinteilung wird die kleinste unter allen Periodizitäten der Paareinteilung selbst und ihrer gedrehten und gespiegelten Bilder bezüglich der lexikographischen Ordnung bezeichnet.

Die Paareinteilung in Abbildung 94 hat die minimale Periodizität $(4,1,0)$.

Der erste Eintrag uv des Periodizitätstripels wird als *Periode* bezeichnet. Zur Festlegung einer Paareinteilung mit minimaler Periode uv werden $uv/2$ Paare benötigt. Um Paareinteilungen mit ungerader Periode zu erhalten, soll in diesem Fall ein Feld pro Periode erlaubt sein, das nicht mit einem anderen zu einem Paar verbunden ist. Die Paareinteilung wird dann durch $(uv - 1)/2$ Paare festgelegt.

Für die Periode 8 etwa sind die 5 Tripel $(8,1,0)$, $(8,2,0)$, $(8,2,1)$, $(8,4,1)$ und $(8,4,3)$ die einzigen möglichen minimalen Periodizitäten. In Tabelle 29 sind die Anzahlen

der verschiedenen möglichen minimalen Periodizitäten zu einer gegebenen Periode angegeben. Diese Anzahlen wurden mit Hilfe des Computers ermittelt, indem von den

Periode	Anzahl	Periode	Anzahl	Periode	Anzahl	Periode	Anzahl
1	1	11	3	21	8	31	7
2	1	12	8	22	7	32	15
3	2	13	4	23	5	33	10
4	3	14	5	24	15	34	10
5	2	15	6	25	7	35	10
6	3	16	9	26	8	36	20
7	3	17	4	27	9	37	8
8	5	18	8	28	13	38	11
9	4	19	5	29	6	39	12
10	4	20	10	30	14	40	20

Tabelle 29: Anzahlen verschiedener minimaler Periodizitäten.

ohne Beschränkung der Allgemeinheit jeweils nur endlich vielen Periodizitäten einer Periode nur diejenigen gezählt wurden, die nicht durch drehen oder spiegeln in eine kleinere Periodizität übergehen.

Als *Länge* eines Paares wird die Anzahl der Schritte von einem zu einem benachbarten Feld bezeichnet, die benötigt werden, um von einem Feld des Paares zum anderen zu kommen. Legt man die Periode uv und die Länge eines längsten Paares l fest, so gibt es nur endliche viele verschiedene Paareinteilungen mit diesen Eigenschaften. Dabei werden Paareinteilungen, die durch drehen, spiegeln oder verschieben auseinander hervorgehen nicht voneinander unterschieden. Die verschiedenen Paareinteilungen für gegebene Werte uv und l wurden mit dem Computer konstruiert, und ihre Anzahlen sind in Tabelle 30 enthalten.

Für alle Polyominos einer gegebenen Größe kann man nun mit Hilfe des Computers überprüfen, ob die in Tabelle 30 gezählten Paareinteilungen Verhinderungsstrategien festlegen, und die betreffenden Polyominos damit als Verlierer erkannt sind. In Tabelle 31 sind die Anzahlen der Polyominos angegeben, die auf diese Art noch nicht als Verlierer nachgewiesen werden konnten. Als Resultat ergibt sich bisher, daß alle Polyominos der Größe 14 Verlierer sind. Damit gilt dies auch für alle größeren Polyominos. Die beiden Polyominos in Abbildung 95 sind zwei der 43 sich sehr ähnlichen noch ungeklärten 13-zelligen Polyominos.

<i>uv</i>	<i>l</i> =1	2	3	4	5	6	<i>uv</i>	<i>l</i> =1
1	-	-	-	-	-	-	21	16146
2	1	1	3	2	5	3	22	4705
3	2	4	3	7	8	6	23	27717
4	3	15	60	80	262	315	24	15956
5	6	31	93	213	310	656	25	85663
6	7	99	724	2437	9001	14170	26	26054
7	15	225	1461	5827			27	262670
8	17	603	9086	46000			28	74191
9	49	2499	28419				29	457578
10	38	3467	106165				30	203300
11	91	13807					31	
12	109	32608					32	425270
13	246	108885					33	
14	183	144374					34	
15	965	1397305					35	
16	468	1155722					36	
17	1625						37	
18	1125						38	
19	4182						39	
20	2566						40	

Tabelle 30: Anzahlen der Paareinteilungen.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	1	8	589
2	1	9	1165
3	3	10	1539
4	7	11	1207
5	20	12	455
6	67	13	43
7	213	Summe	5310

Tabelle 31: Anzahlen der Polyominos, die nicht als Verlierer nachgewiesen sind.

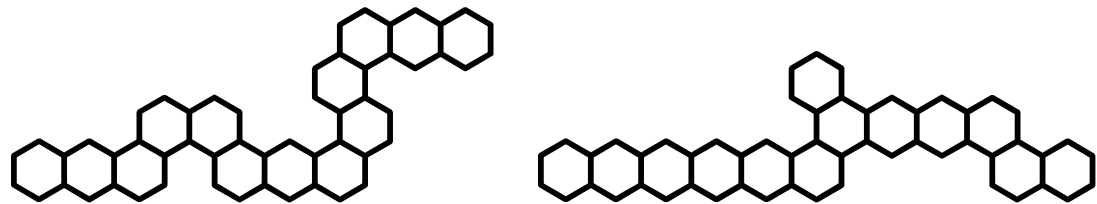


Abbildung 95: Zwei der 43 ungeklärten 13-zelligen Polyominos.

6.3.2 Gewinner

Abbildung 96 zeigt alle bekannten Gewinner, die nicht in einem anderen bekannten Gewinner enthalten sind. Zusammen mit ihren Teilpolyominos, die ja auch alle Gewin-

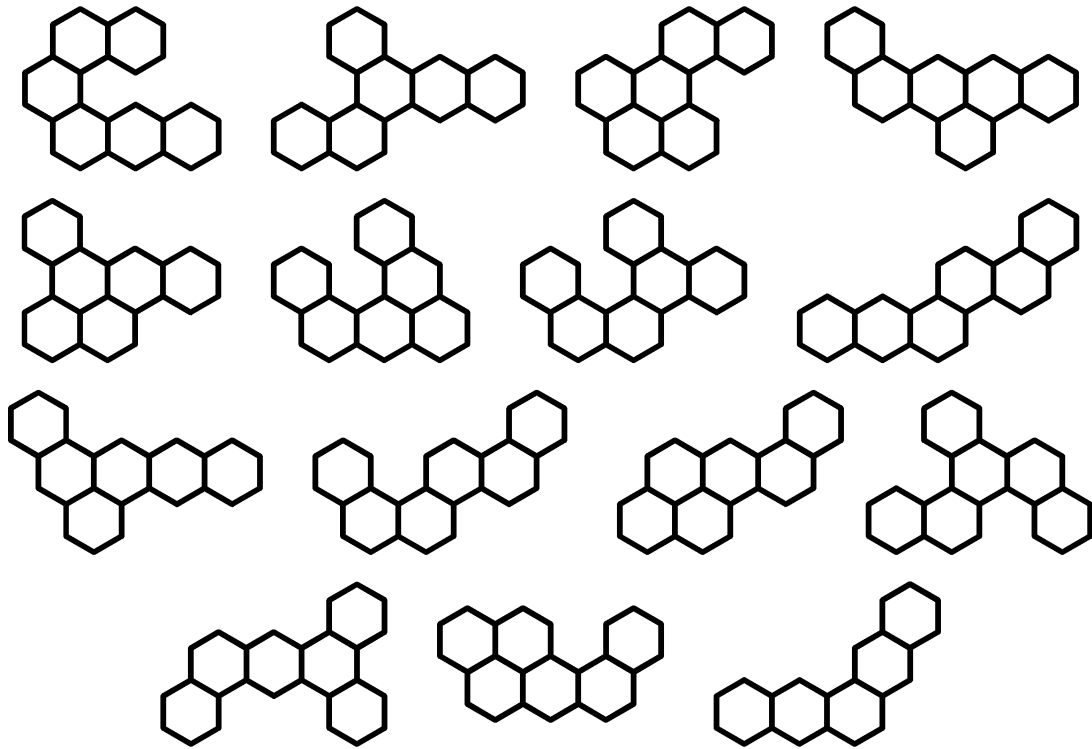


Abbildung 96: Die maximalen bekannten Gewinner.

ner sind, ergibt sich eine Anzahl von insgesamt 45 Gewinnern. Die Strategien für diese Polyominos wurden mit Hilfe des Computers ermittelt (siehe Abschnitt 3.3). Wegen der großen Anzahl ihrer Gewinnsituationen können diese Strategien hier nicht dargestellt werden. Abbildung 97 enthält eine Aufbaustrategie für ein 5-zelliges Polyomino ([2]).

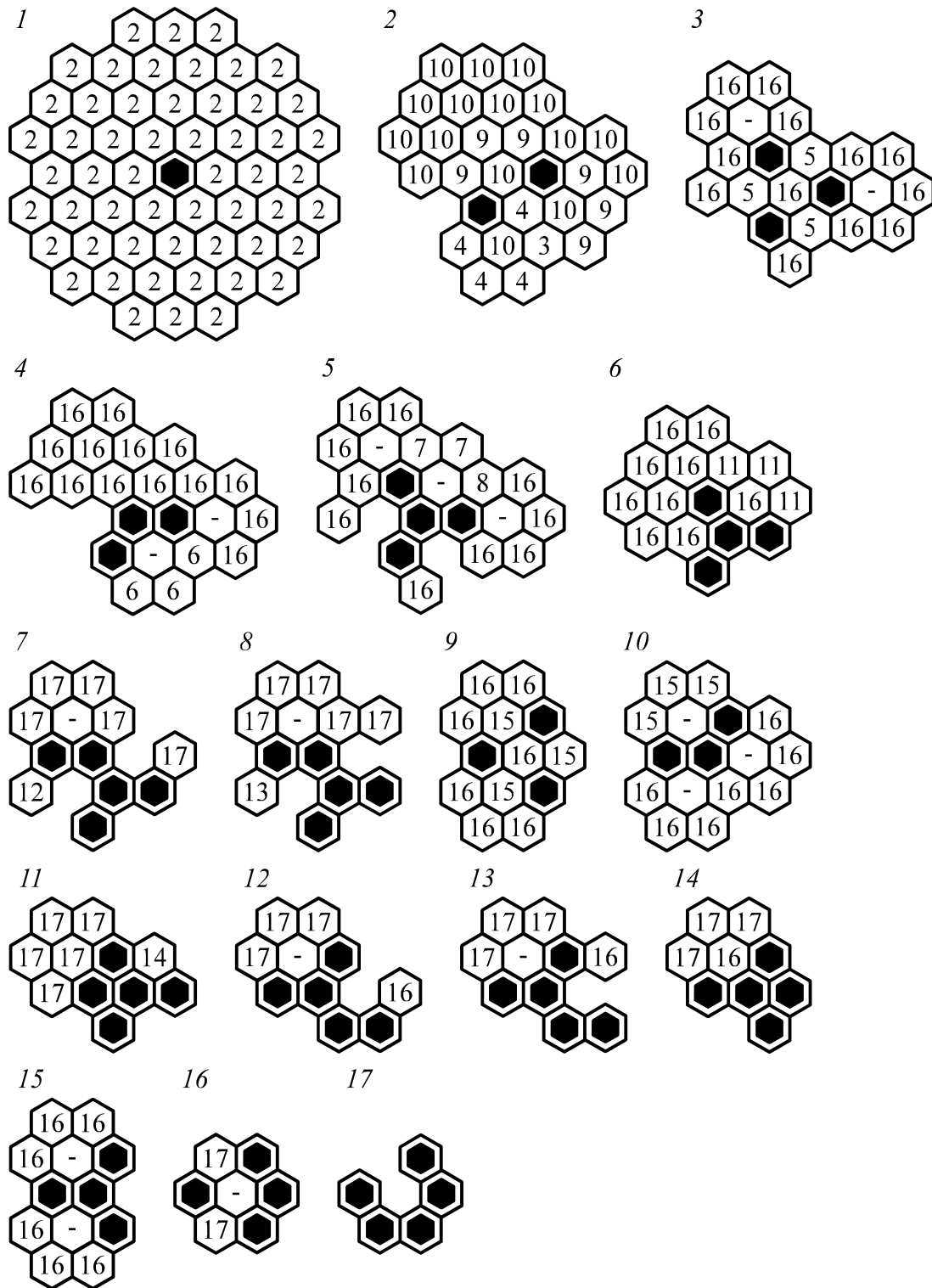


Abbildung 97: Aufbaustrategie.

6.3.3 Zusammenfassung

Tabelle 32 zeigt, wieviele der Polyominos mit bis zu 6 Zellen bereits als Gewinner oder Verlierer bekannt sind, und für wieviele Polyominos die Frage noch nicht beantwortet wurde. Abbildung 98 zeigt die beiden Verlierer und das ungeklärte Polyomino mit 5 Zellen.

Größe	Gewinner	Verlierer	?
1	1	0	0
2	1	0	0
3	3	0	0
4	7	0	0
5	19	2	1
6	14	14	53

Tabelle 32: Gewinner, Verlierer und ungeklärte Polyominos mit bis zu 6 Zellen.

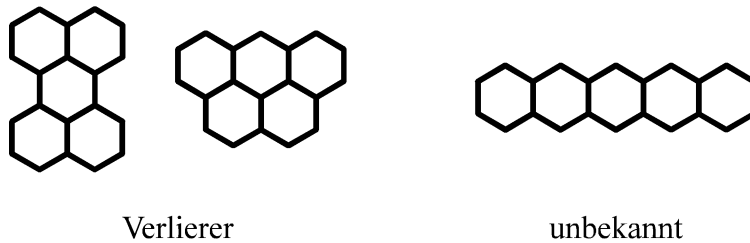


Abbildung 98: Die Verlierer und das ungeklärte Polyomino mit 5 Zellen.

Die Tatsache, daß das linke Polyomino ein Verlierer ist, wird etwa durch die Paareinteilung in Abbildung 94 nachgewiesen. Neben dem ungeklärten Polyomino mit 5 Zellen in Abbildung 98 ist die Frage nach Gewinner oder Verlierer auch für das Polyomino, das aus 6 Zellen in einer Reihe besteht, noch nicht beantwortet. Das 7-in-einer-Reihe Polyomino ist jedoch als Verlierer bekannt.

Zieht man die Anzahl der bekannten Gewinner (45) von der Anzahl der noch nicht als Verlierer erkannten Polyominos (5310) ab, so ergibt sich 5265 als Anzahl der noch offenen Fälle.

7 Archimedische Parkettierungen

Die archimedischen Parkettierungen sind die nichtregulären ebenen Mosaik-Graphen. Es gibt 8 verschiedene archimedische Parkettierungen ([25]). Für die archimedische Parkettierung mit der Eckenfolge $(3,3,3,4,4)$ sind die Mengen der Gewinner und Verlierer vollständig bestimmt. Bei den Eckenfolgen $(3,3,4,3,4)$ und $(3,3,3,3,6)$ gibt es noch jeweils 4 Polyominos, für die nicht bekannt ist, ob sie Gewinner oder Verlierer sind. Für die Eckenfolgen $(3,4,6,4)$, $(3,6,3,6)$ und $(4,8,8)$ konnte die Anzahl und die Größe der Gewinner mit Hilfe von Paareinteilungsstrategien nach oben beschränkt werden. Bei den beiden archimedischen Parkettierungen mit den Eckenfolgen $(3,12,12)$ und $(4,6,12)$ konnten Schranken für die Anzahlen der Gewinner nur für einige kleinere Größen angegeben werden.

7.1 Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner

Die Bestimmung von oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner auf den archimedischen Parkettierungen erfolgt wie beim Sechseck-Gitter (siehe Abschnitt 6.3.1). Mit Hilfe von Koordinatensystemen wird die Periode uv einer Paareinteilung definiert. Für die acht archimedischen Parkettierungen sind die Einheitsvektoren der benutzten Koordinatensysteme in den Abbildungen 99 und 100 dargestellt. Einer Paareinteilung wird die *Eigenschaft* (uv, l) zugeordnet, wenn sie eine Periode kleiner als uv hat, und

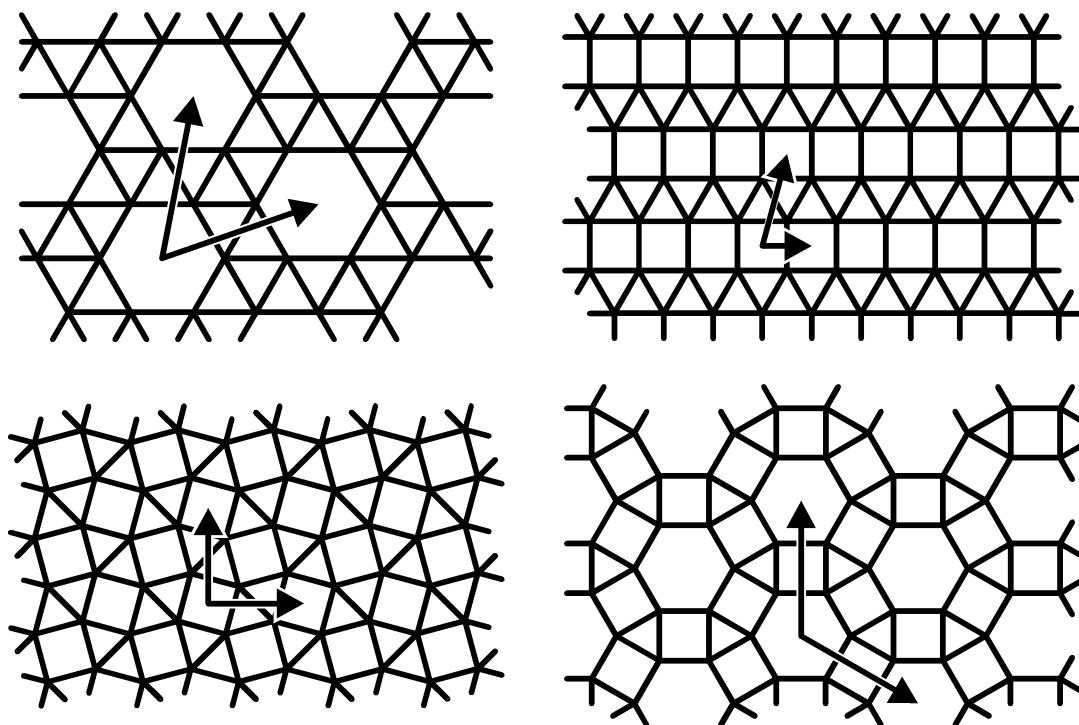


Abbildung 99: Koordinatensysteme, Teil 1.

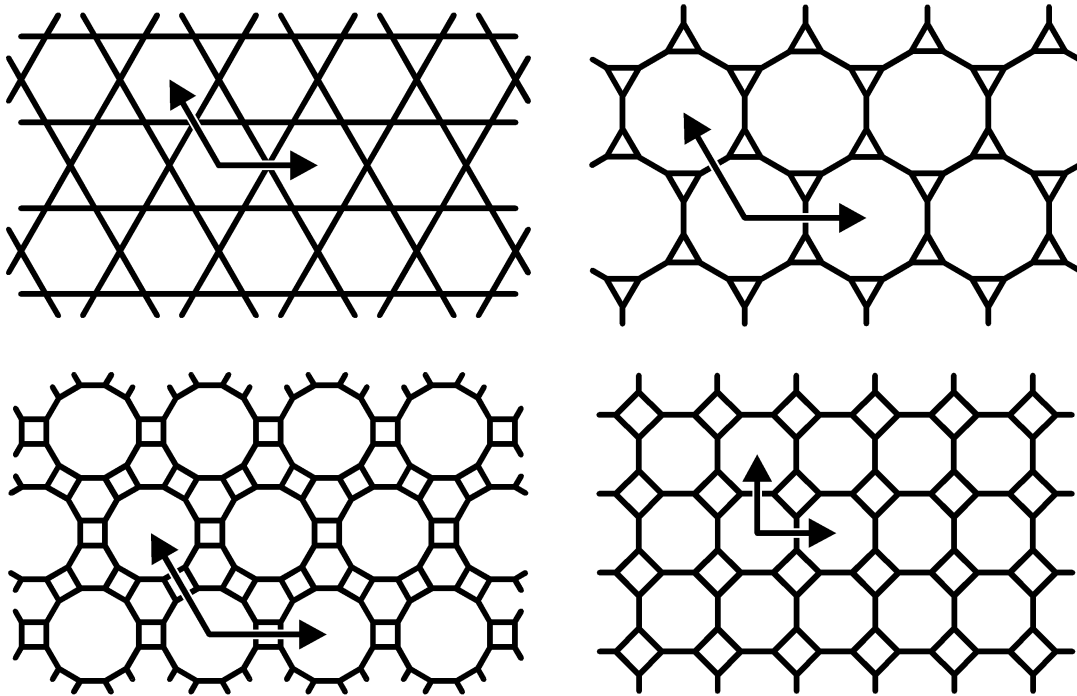


Abbildung 100: Koordinatensysteme, Teil 2.

wenn alle Paare höchstens die Länge l haben. Im Gegensatz zum Sechseck-Gitter wurden hier auch Paareinteilungen untersucht, bei denen mehr als ein Feld pro Periode nicht mit einem anderen zu einem Paar verbunden ist. Es läßt sich nun per Computer überprüfen, ob sich unter den Polyominos einer bestimmten Größe solche befinden, die sich mit Hilfe von Paareinteilungen mit einer gegebenen Eigenschaft (uv, l) als Verlierer nachweisen lassen. Sind alle Polyominos einer Größe Verlierer, so sind auch alle größeren Polyominos Verlierer.

7.2 Eckenfolge (3,3,3,3,6)

Ein Ausschnitt des Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,3,3,3,6) ist in Abbildung 101 dargestellt. In Tabelle 33 sind die Polyominos mit bis zu 14 Zellen gezählt. Abbildung

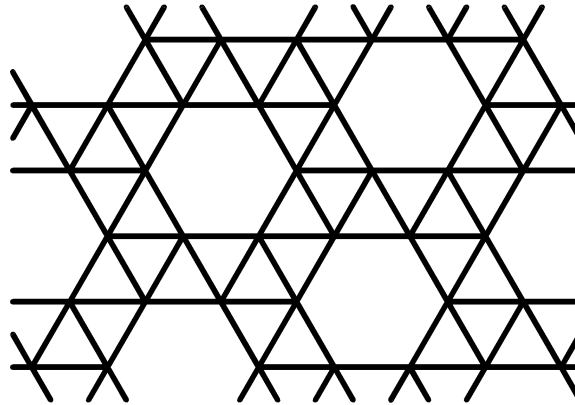


Abbildung 101: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	8	2594
2	3	9	8943
3	7	10	31164
4	23	11	108840
5	69	12	382063
6	228	13	1345840
7	762	14	4758782

Tabelle 33: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

102 enthält die maximalen bekannten Gewinner, die minimalen bekannten Verlierer und die vier Polyominos, für die die Frage nach Gewinner oder Verlierer noch nicht beantwortet ist. Diejenigen Dreiecke, die (auch auf dem Spielbrett) kein Sechseck als Nachbar haben, sind zur Unterscheidung mit einem Kreis gekennzeichnet. Entsprechende Aufbaustrategien sind in den Abbildungen 103 bis 105 und Verhinderungs-Strategien in den Abbildungen 106 bis 111 dargestellt.

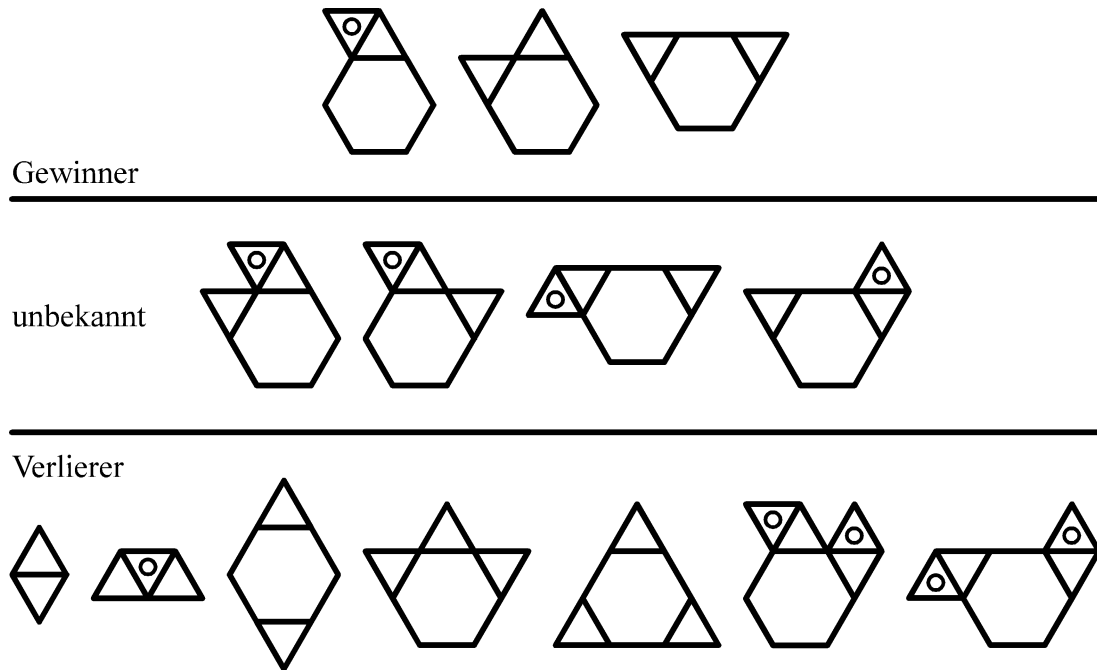


Abbildung 102: Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

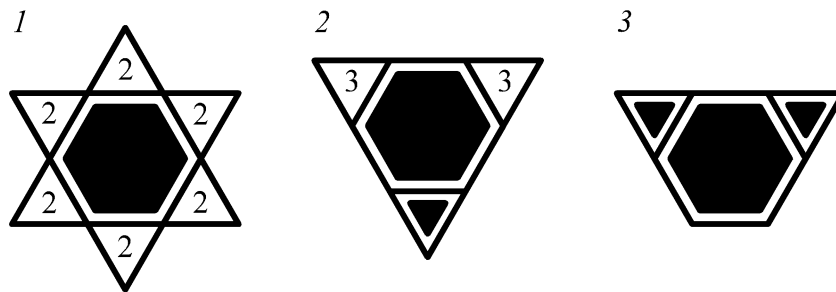


Abbildung 103: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

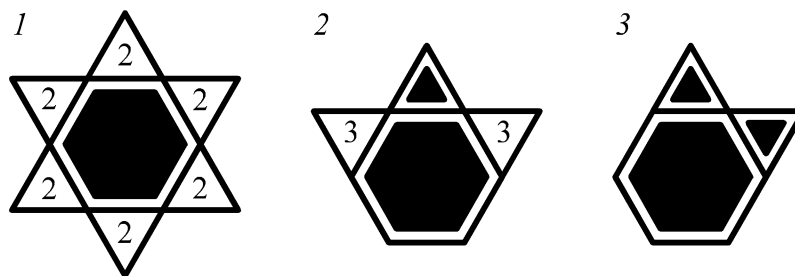


Abbildung 104: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

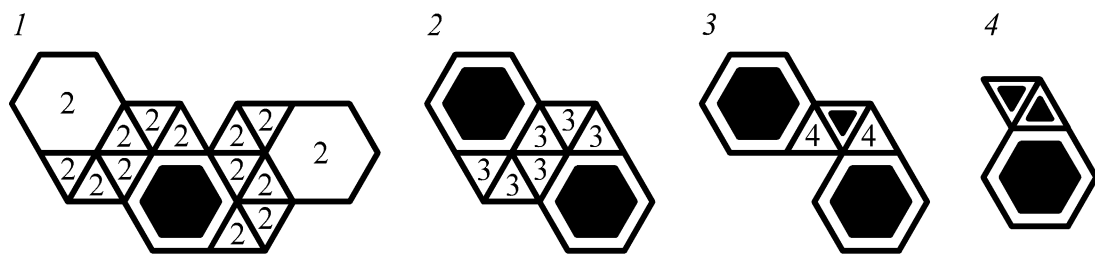


Abbildung 105: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

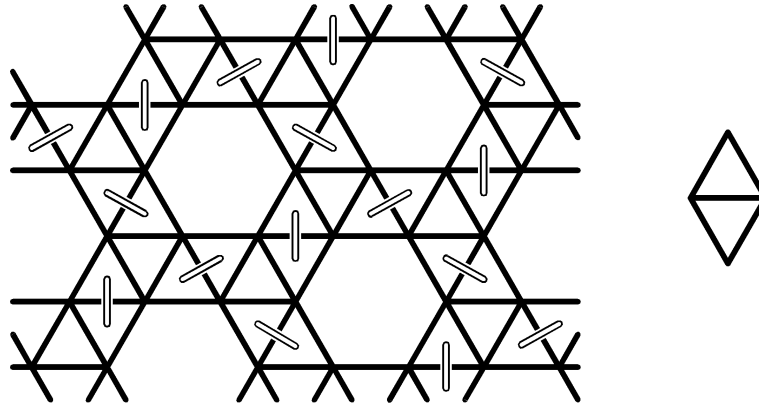


Abbildung 106: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

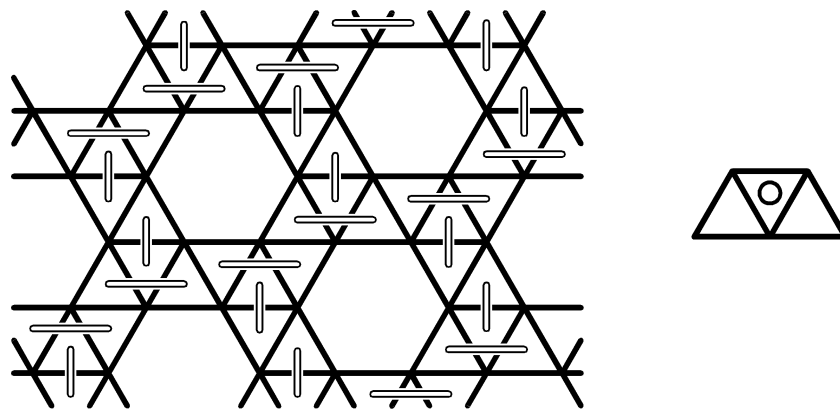


Abbildung 107: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

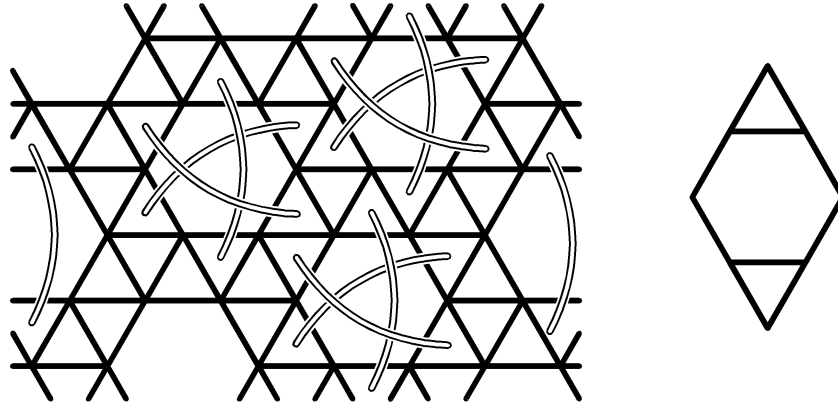


Abbildung 108: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

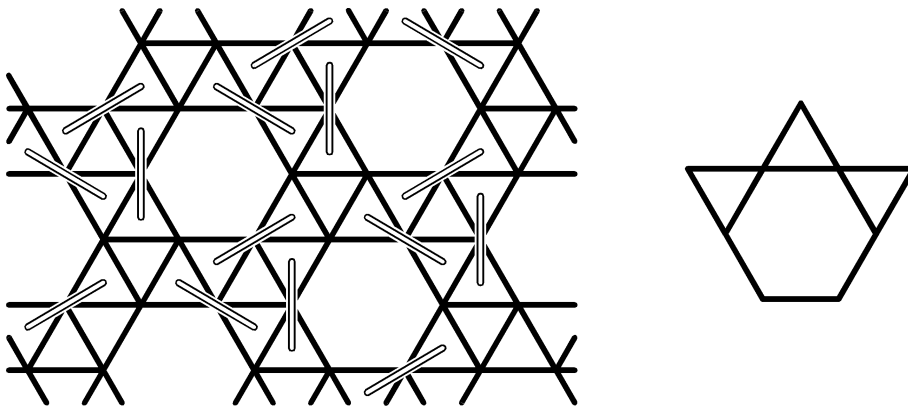


Abbildung 109: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

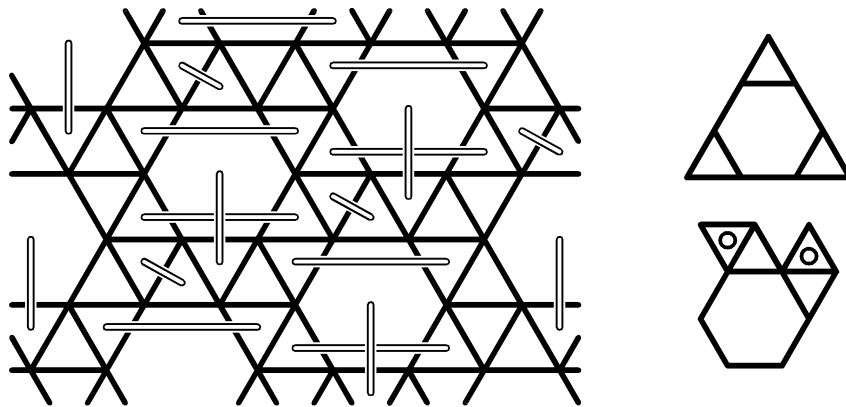


Abbildung 110: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

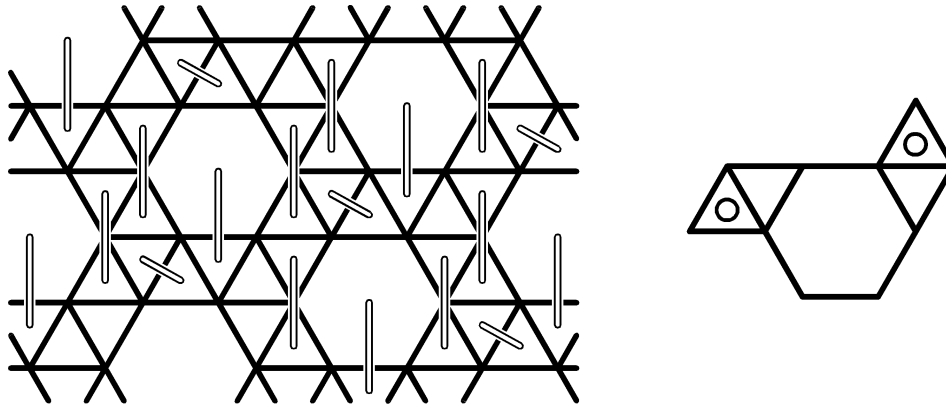


Abbildung 111: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,3,6).

7.3 Eckenfolge (3,3,3,4,4)

Ein Ausschnitt des Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,3,3,4,4) ist in Abbildung 112 dargestellt. In Tabelle 34 sind die Polyominos mit bis zu 15 Zellen gezählt. Abbildung 113 enthält die elementaren Gewinner und Verlierer. Abbildungen 114 bis 116

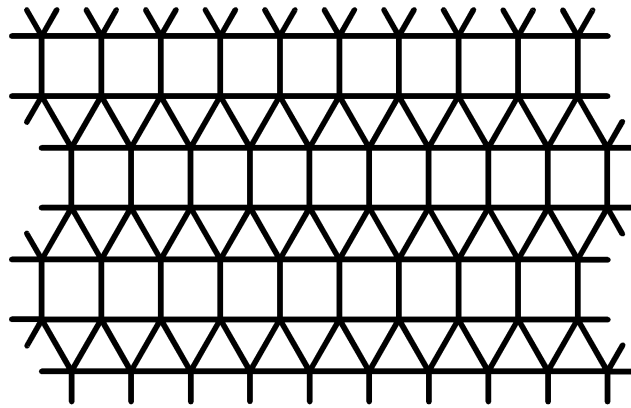


Abbildung 112: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

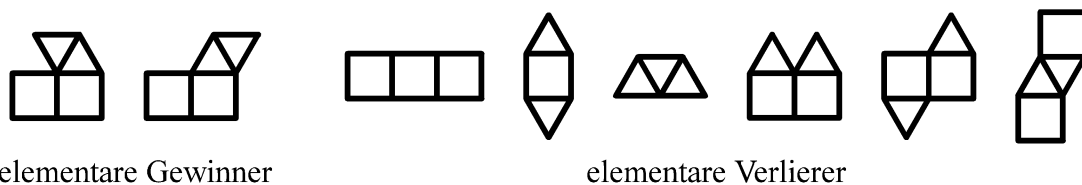


Abbildung 113: Elementare Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

zeigen Aufbaustrategien für die beiden elementaren Gewinner und Abbildungen 117 bis 119 Paareinteilungsstrategien für die sechs elementaren Verlierer.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	9	2822
2	3	10	9207
3	5	11	30117
4	13	12	99708
5	32	13	331219
6	96	14	1106870
7	281	15	3710728
8	891		

Tabelle 34: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

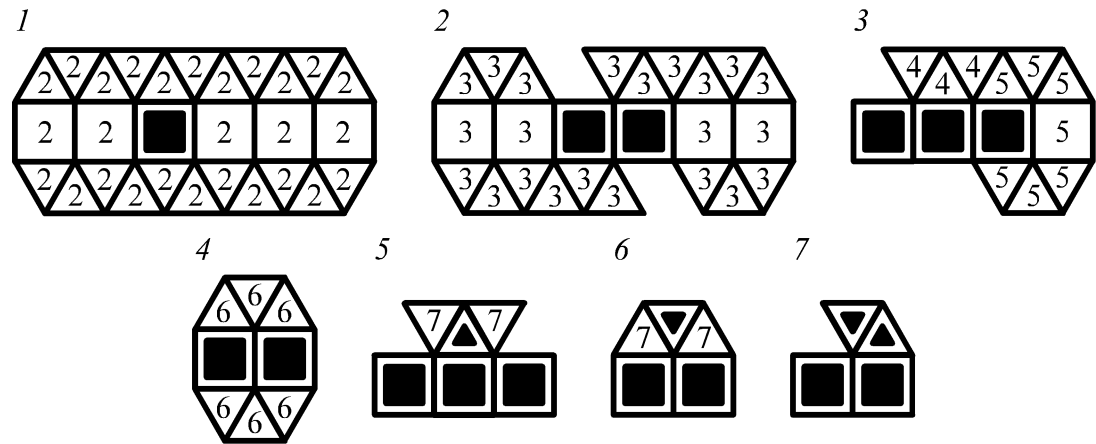


Abbildung 114: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

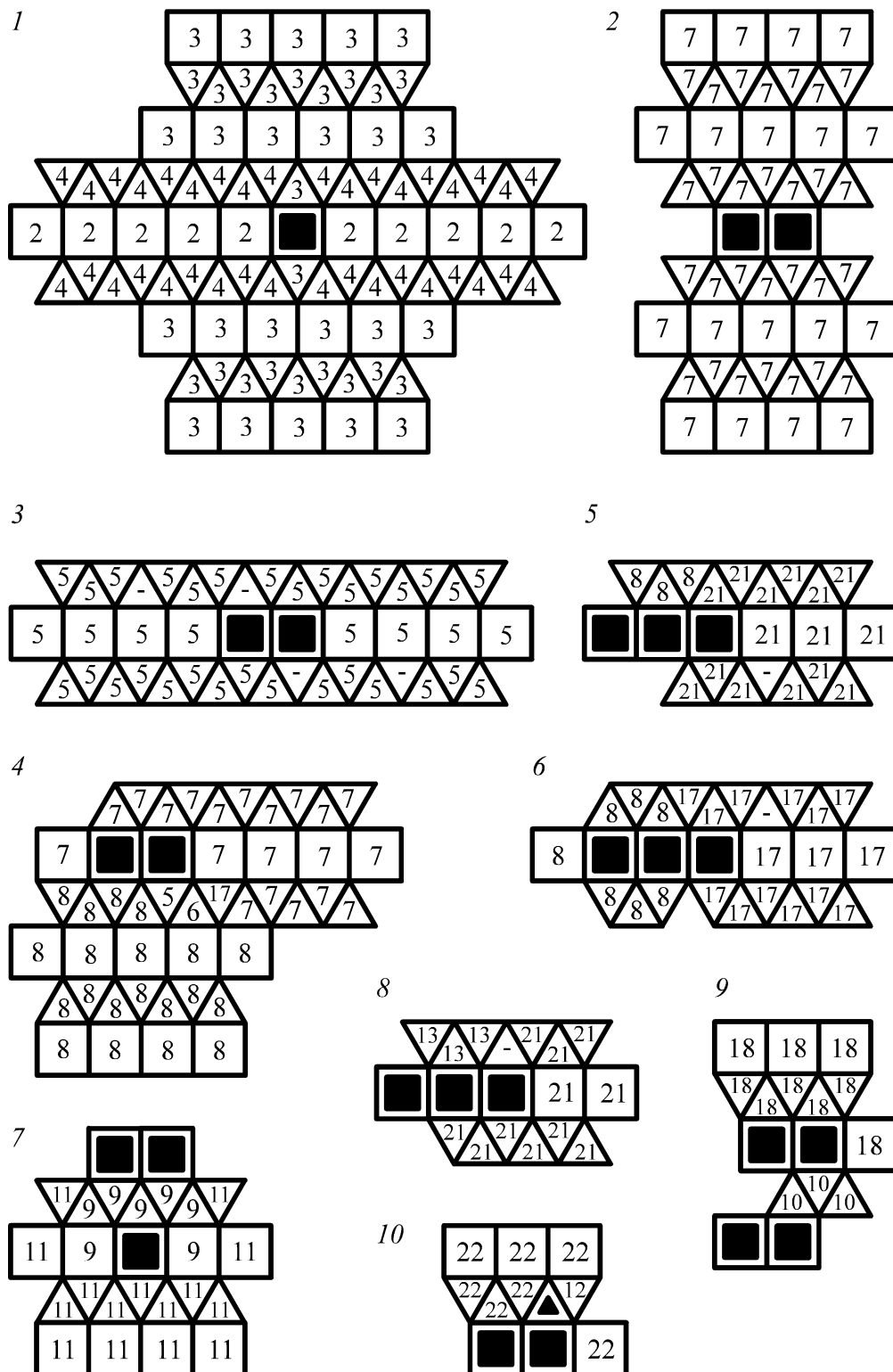


Abbildung 115: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4), Teil 1.

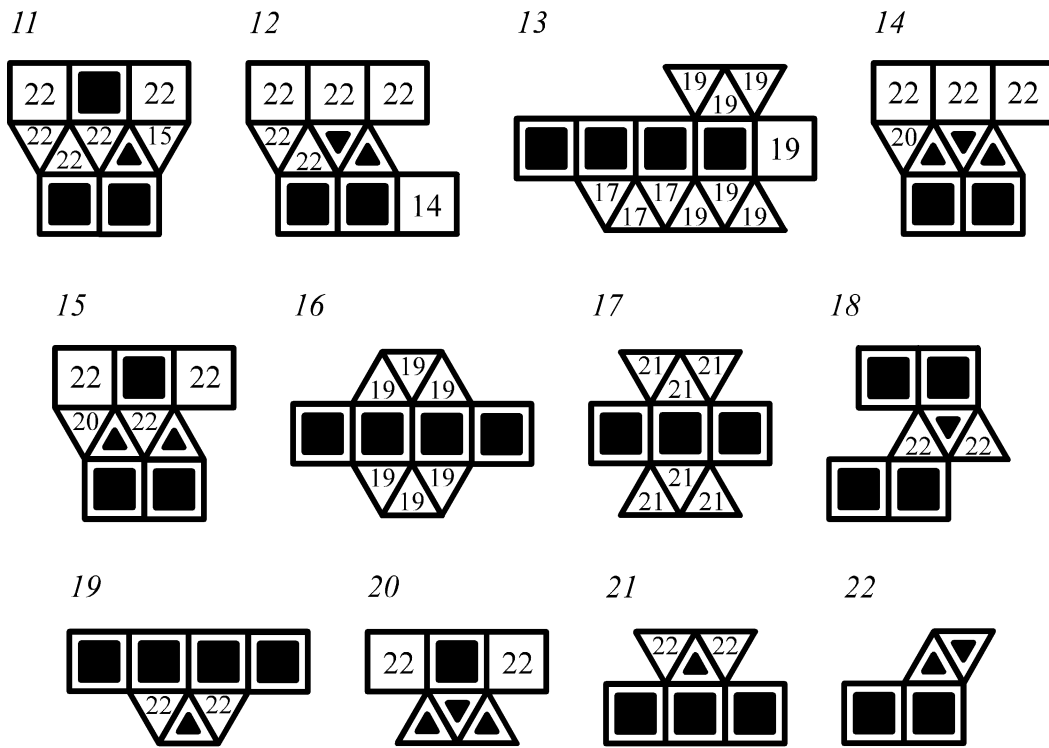


Abbildung 116: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4), Teil 2.

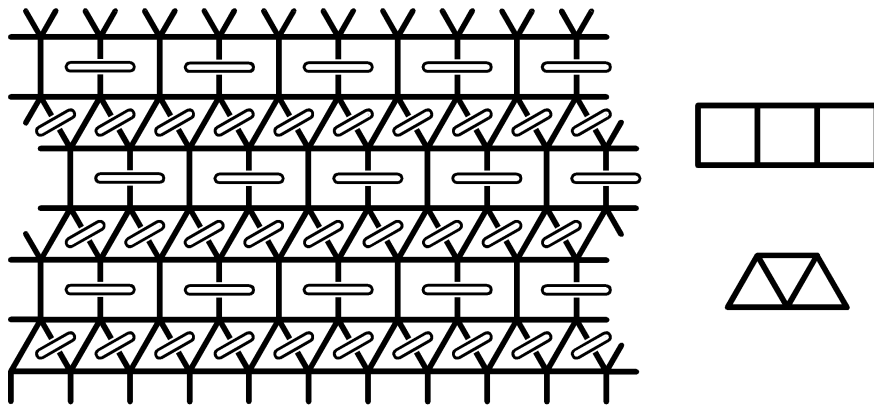


Abbildung 117: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

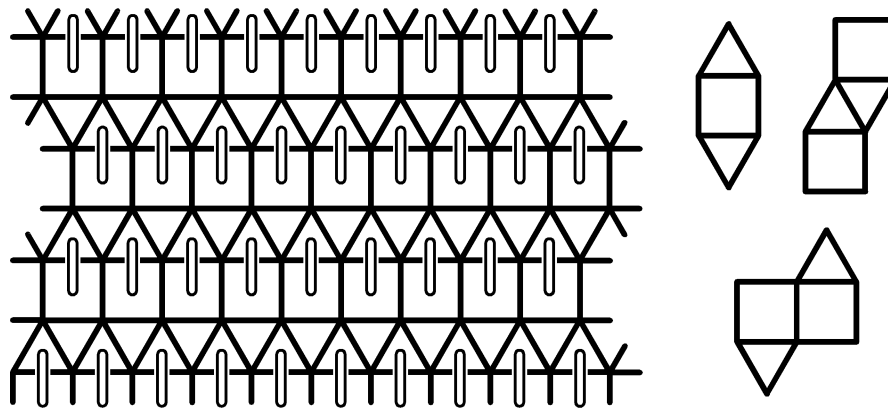


Abbildung 118: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

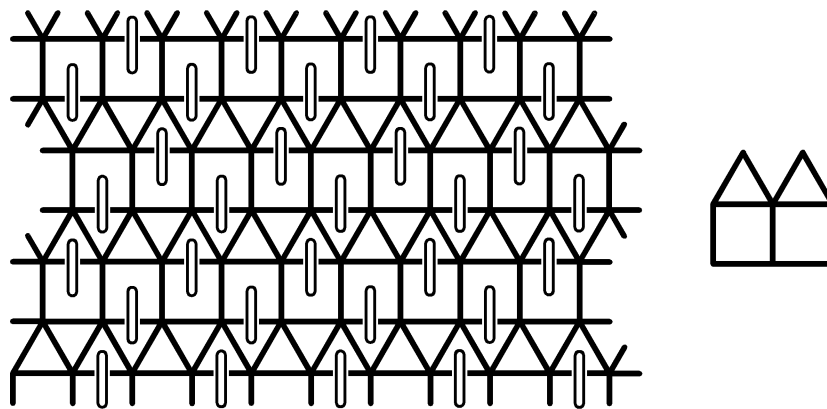


Abbildung 119: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,3,4,4).

7.4 Eckenfolge (3,3,4,3,4)

Ein Ausschnitt des Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,3,4,3,4) ist in Abbildung 120 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos mit bis zu 15 Zellen sind in Tabelle 35 ent-

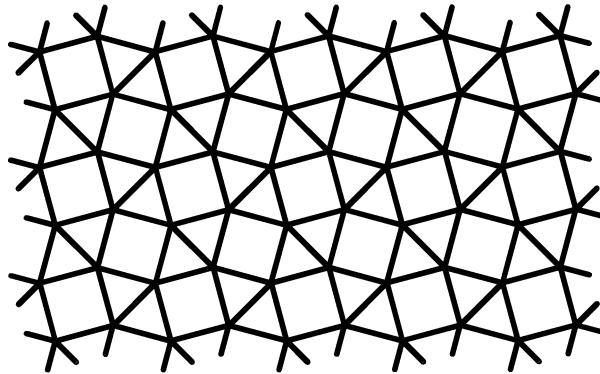


Abbildung 120: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

halten. Abbildung 121 enthält die maximalen bekannten Gewinner, die minimalen bekannten Verlierer und die vier Polyominos, für die die Frage nach Gewinner oder Verlierer noch nicht beantwortet ist. Entsprechende Aufbaustrategien sind in den Abbildungen 122 und 123 und Verhinderungs-Strategien in den Abbildungen 124 bis 127 dargestellt.

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	9	2161
2	2	10	6690
3	4	11	20881
4	10	12	65593
5	28	13	207171
6	79	14	657301
7	233	15	2093785
8	705		

Tabelle 35: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

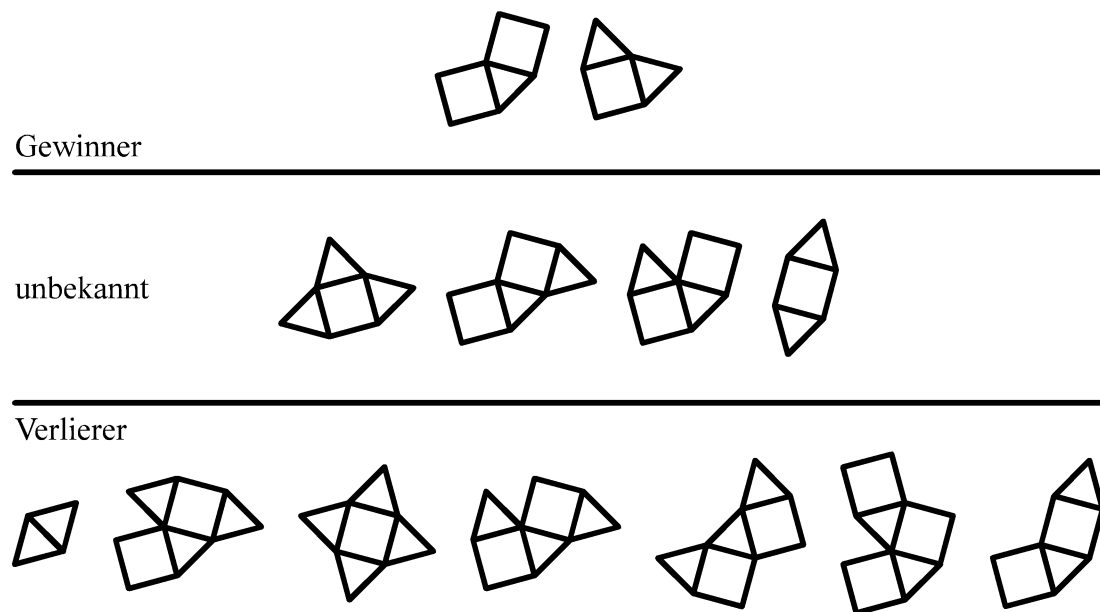


Abbildung 121: Gewinner und Verlierer, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

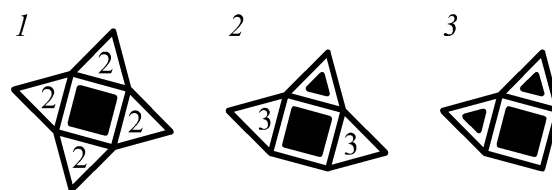


Abbildung 122: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

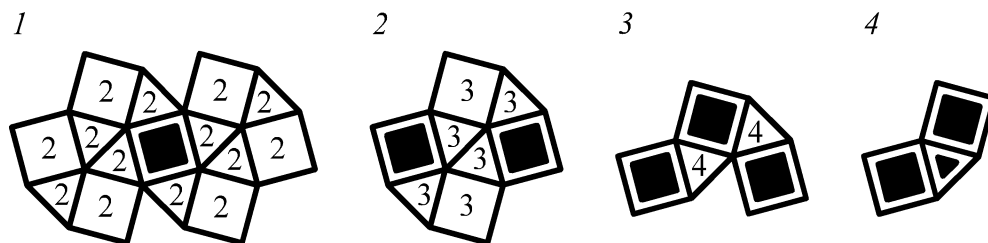


Abbildung 123: Aufbaustrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

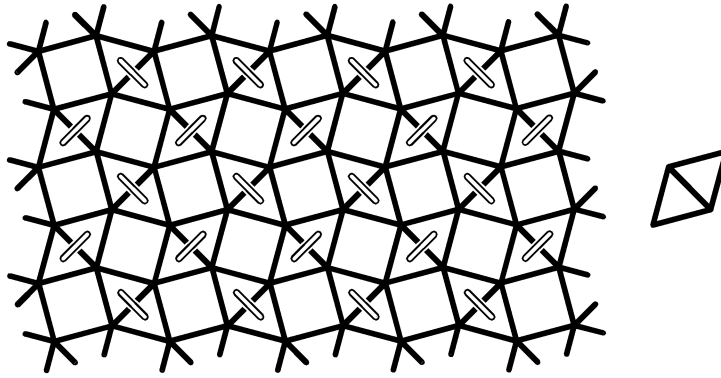


Abbildung 124: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

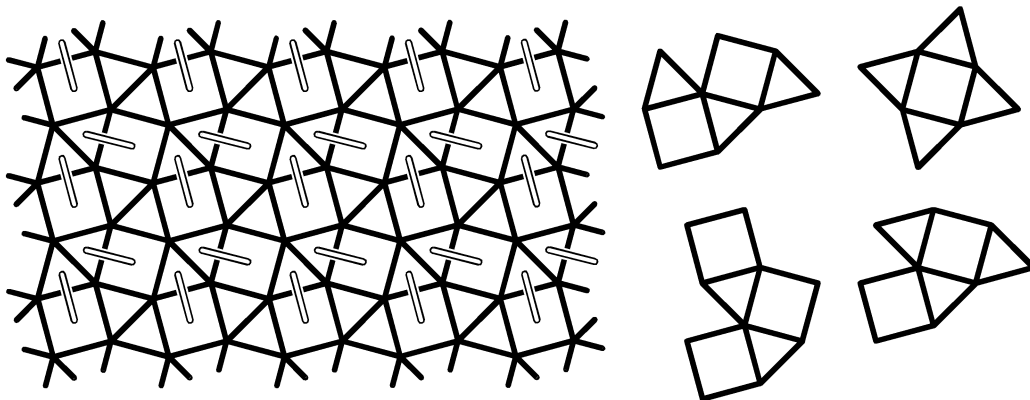


Abbildung 125: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

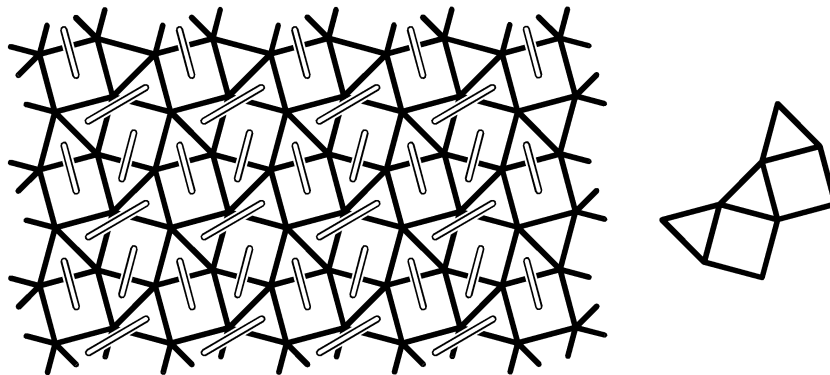


Abbildung 126: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

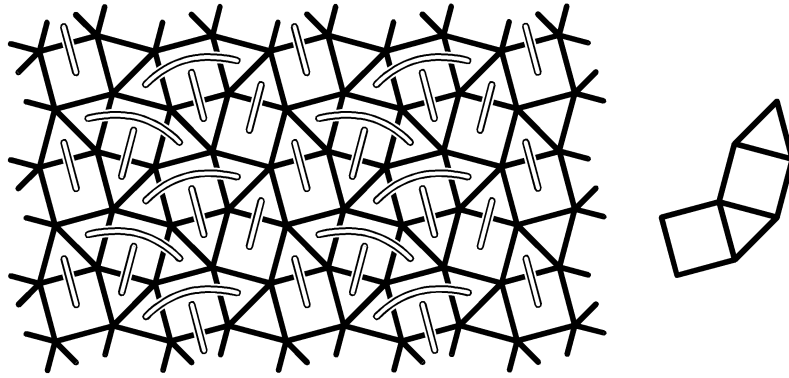


Abbildung 127: Paareinteilungsstrategie, Eckenfolge (3,3,4,3,4).

7.5 Eckenfolge (3,4,6,4)

Ein Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,4,6,4) ist in Abbildung 128 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos bis zur Größe 13 sind in Tabelle 36 angegeben. Mit Hilfe der Paareinteilungen mit den Eigenschaften (1,4), (2,2) und (4,1) lassen sich die in Tabelle 37 angegebenen oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner erhalten (siehe Abschnitt 7.1).

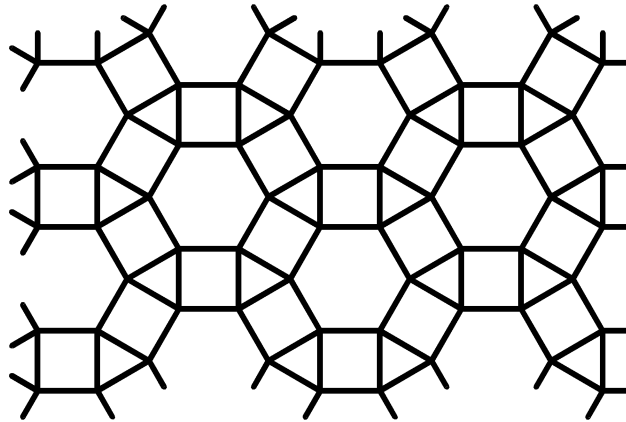


Abbildung 128: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,4,6,4).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	8	3116
2	2	9	13091
3	7	10	55021
4	16	11	235754
5	59	12	1015101
6	194	13	4408515
7	790		

Tabelle 36: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,4,6,4).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	5	32	9	7
2	2	6	53	10	0
3	7	7	59		
4	13	8	32	Summe	208

Tabelle 37: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner, Eckenfolge (3,4,6,4).

7.6 Eckenfolge (3,6,3,6)

Ein Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,6,3,6) ist in Abbildung 129 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos bis zur Größe 14 sind in Tabelle 38 angegeben. Mit Hilfe der Paareinteilungen mit den Eigenschaften (2,4), (4,2) und (5,1) lassen sich die in Tabelle 37 angegebenen oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner erhalten (siehe Abschnitt 7.1).

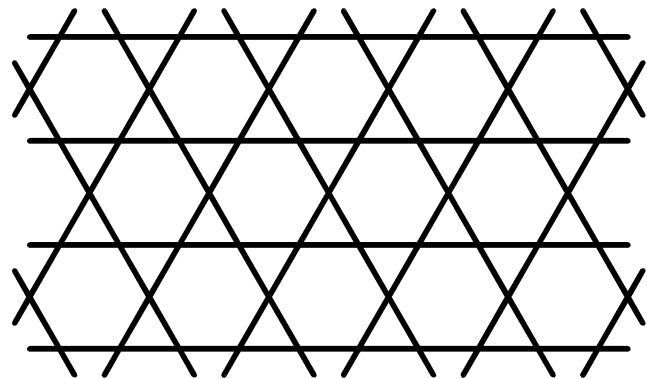


Abbildung 129: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,6,3,6).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	8	1167
2	1	9	4393
3	4	10	16552
4	9	11	63618
5	29	12	245732
6	90	13	957443
7	330	14	3745541

Tabelle 38: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,6,3,6).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	5	24	9	3
2	1	6	53	10	0
3	4	7	74	Summe	206
4	9	8	36		

Tabelle 39: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner, Eckenfolge (3,6,3,6).

7.7 Eckenfolge (3,12,12)

Ein Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (3,12,12) ist in Abbildung 130 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos bis zur Größe 10 sind in Tabelle 40 angegeben. Mit Hilfe der Paareinteilungen mit den Eigenschaften (2,3) und (3,2) lassen sich die in Tabelle 41 angegebenen oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner erhalten (siehe Abschnitt 7.1).

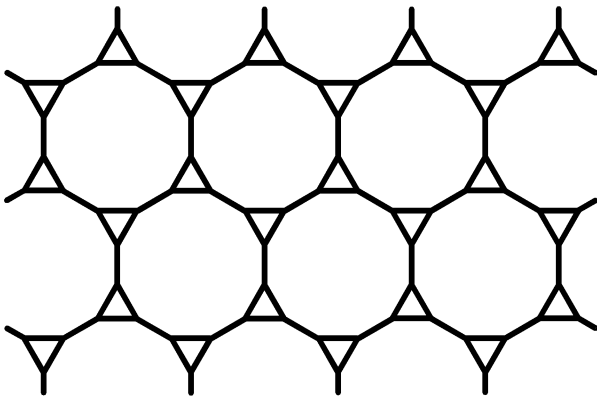


Abbildung 130: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (3,12,12).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	6	983
2	2	7	5949
3	8	8	37198
4	35	9	237762
5	173	10	1541542

Tabelle 40: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (3,12,12).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	5	170
2	2	6	955
3	8	7	5563
4	35		

Tabelle 41: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner, Eckenfolge (3,12,12).

7.8 Eckenfolge (4,6,12)

Ein Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (4,6,12) ist in Abbildung 131 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos bis zur Größe 11 sind in Tabelle 42 angegeben. Mit Hilfe der Paareinteilungen mit den Eigenschaften (1,4) und (2,1) lassen sich die in Tabelle 43 angegebenen oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner erhalten (siehe Abschnitt 7.1).

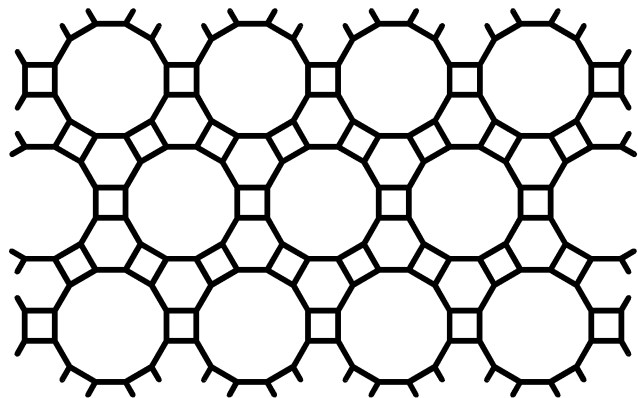


Abbildung 131: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (4,6,12).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	7	7796
2	3	8	45876
3	14	9	278002
4	49	10	1697278
5	255	11	10472378
6	1327		

Tabelle 42: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (4,6,12).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	3	5	224
2	3	6	1071
3	14		
4	46		

Tabelle 43: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner, Eckenfolge (4,6,12).

7.9 Eckenfolge (4,8,8)

Ein Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen mit der Eckenfolge (4,8,8) ist in Abbildung 132 dargestellt. Die Anzahlen der Polyominos bis zur Größe 11 sind in Tabelle 44 angegeben. Mit Hilfe der Paareinteilungen mit den Eigenschaften (4,2) und (8,1) lassen sich die in Tabelle 45 angegebenen oberen Schranken für die Anzahlen der Gewinner erhalten (siehe Abschnitt 7.1).

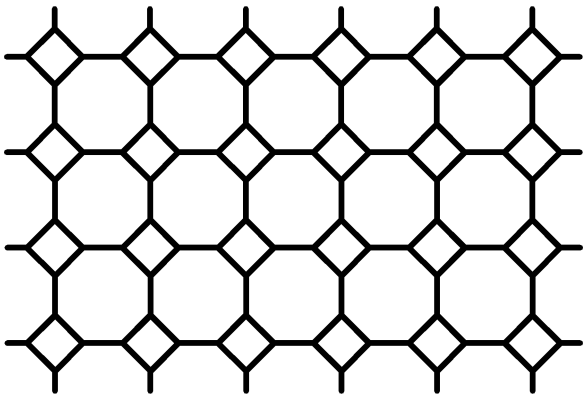


Abbildung 132: Ausschnitt aus dem Mosaik-Graphen, Eckenfolge (4,8,8).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	7	1914
2	2	8	9645
3	7	9	50447
4	21	10	266992
5	90	11	1432165
6	388		

Tabelle 44: Anzahlen der Polyominos, Eckenfolge (4,8,8).

Größe	Anzahl	Größe	Anzahl	Größe	Anzahl
1	2	7	490	13	32
2	2	8	951	14	1
3	7	9	1363	15	0
4	20	10	1303		
5	63	11	734		
6	198	12	210	Summe	7967

Tabelle 45: Obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner, Eckenfolge (4,8,8).

8 Hyperbolische Mosaik

Hyperbolische Mosaik sind diejenigen Mosaik-Graphen, die sich weder auf der Kugel noch in der Ebene mit regulären Vielecken darstellen lassen. Hier soll nur der einfachste Fall behandelt werden, bei dem alle Flächen Dreiecke sind. In diesem Fall ist die Frage nach Gewinnern und Verlierern jedoch für alle Knotengrade $q \geq 7$ bis auf wenige Fälle, für einige Klassen von q sogar vollständig beantwortet ([3]).

8.1 $(3,q)$ -Mosaik-Graphen

Die Anzahlen der $(3,q)$ -Polyominos bis zur Größe 11 sind in Tabelle 46 enthalten. Dabei ist zu beachten, daß sich die Anzahlen für eine gegebene Größe n für alle

Größe	q					
	6	7	8	9	10	≥ 11
1, 2, 3	1					
4	3					
5	4					
6	12					
7	24	27				
8	66	78	82			
9	159	208	224	228		
10	444	637	708	728	733	
11	1161	1869	2158	2252	2277	2282

Tabelle 46: Anzahlen der $(3,q)$ -Polyominos.

$q \geq n$ nicht unterscheiden, da alle diese Polyominos (bis auf das Polyomino, das aus q Zellen um einen Knoten besteht) Baumstruktur haben, und somit q keinen Einfluß auf die Anzahl hat. Die 22 Polyominos mit bis zu 6 Zellen sind in Abbildung 133 gezeigt. Abbildung 134 enthält alle elementaren Gewinner G und Verlierer V für die verschiedenen Restklassen q modulo 6. Die Frage nach Gewinner oder Verlierer ist für die mit ‘?’ gekennzeichneten Polyominos noch nicht geklärt. Abhängig davon können sich die Polyominos mit Klammern als nichtelementar herausstellen.

Die Abbildungen 135 bis 137 enthalten Aufbaustrategien für die drei verschiedenen Gewinner in Abbildung 134. Bei den Strategien in Abbildung 136 und 137 kann die Gewinnsituation I erst mit dem zweiten Zug von Spieler A erreicht werden. Die geschweiften Klammern bedeuten, daß die Blöcke zwischen den Doppelstrichen sooft eingefügt werden müssen, bis ihre Anzahl der Zahl hinter der Klammer entspricht. Der Wert s ergibt sich aus q . Mit Hilfe der Variablen t werden ähnliche Gewinnsituationen zusammengefaßt.

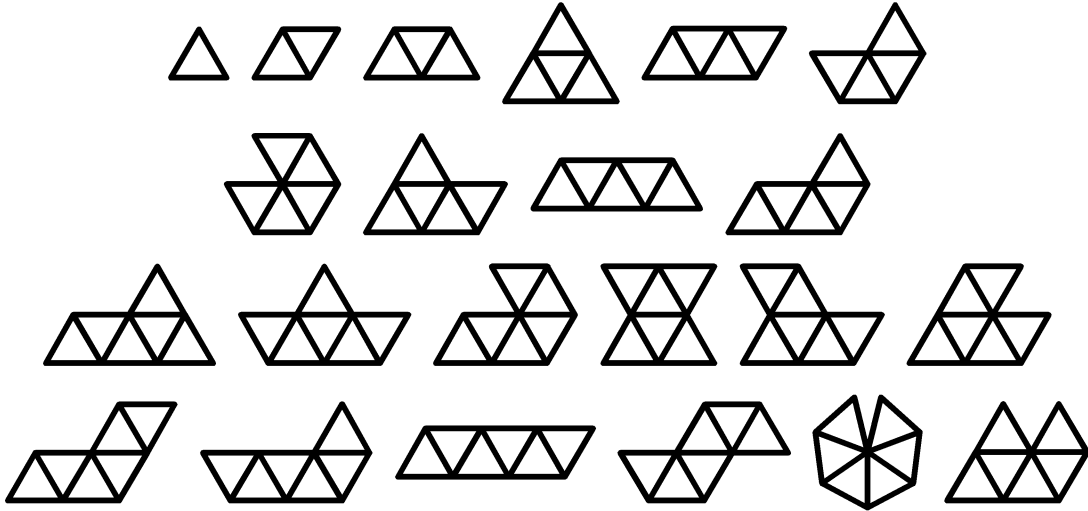
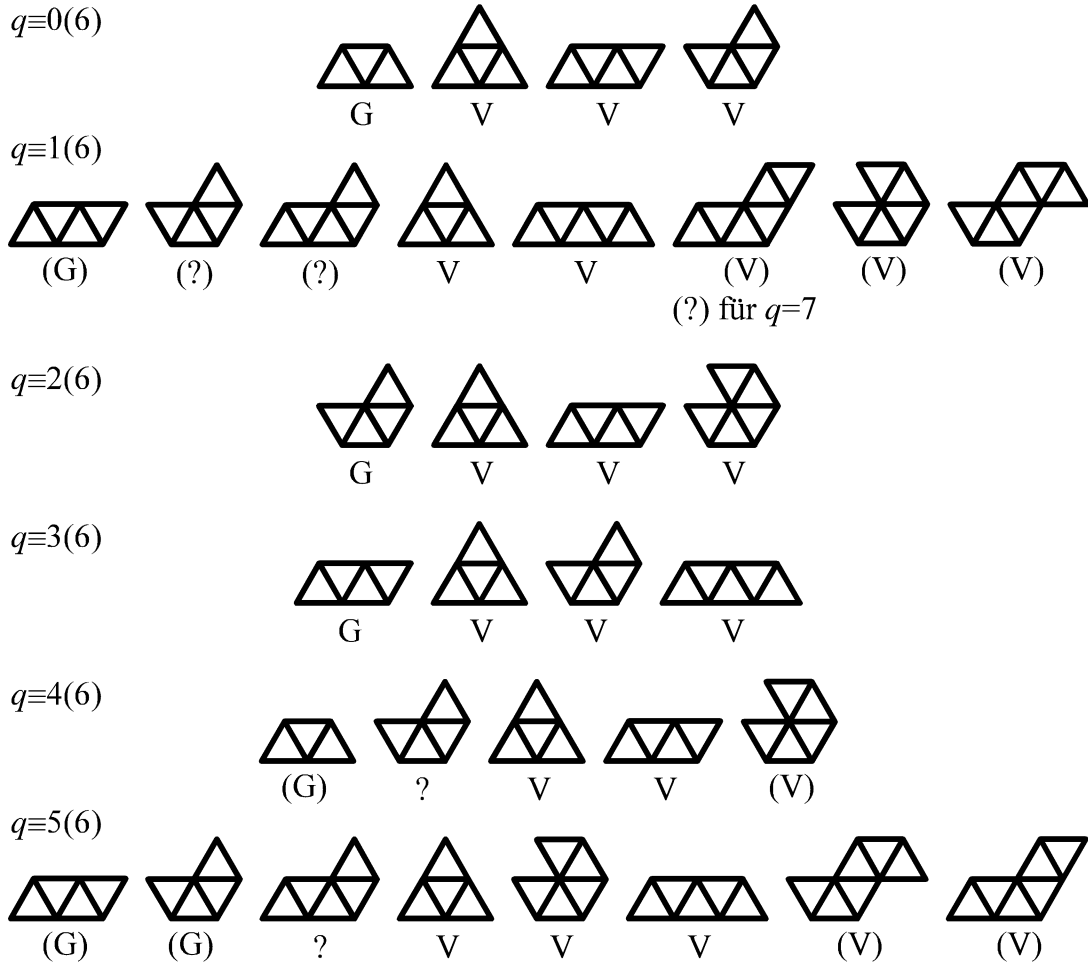
Abbildung 133: (3,q)-Mosaik-Polyominoes mit bis zu 6 Zellen ($q \geq 7$).

Abbildung 134: Elementare Gewinner und Verlierer.

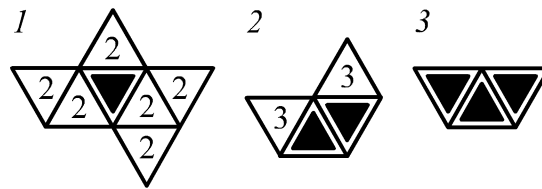


Abbildung 135: Aufbaustrategie.

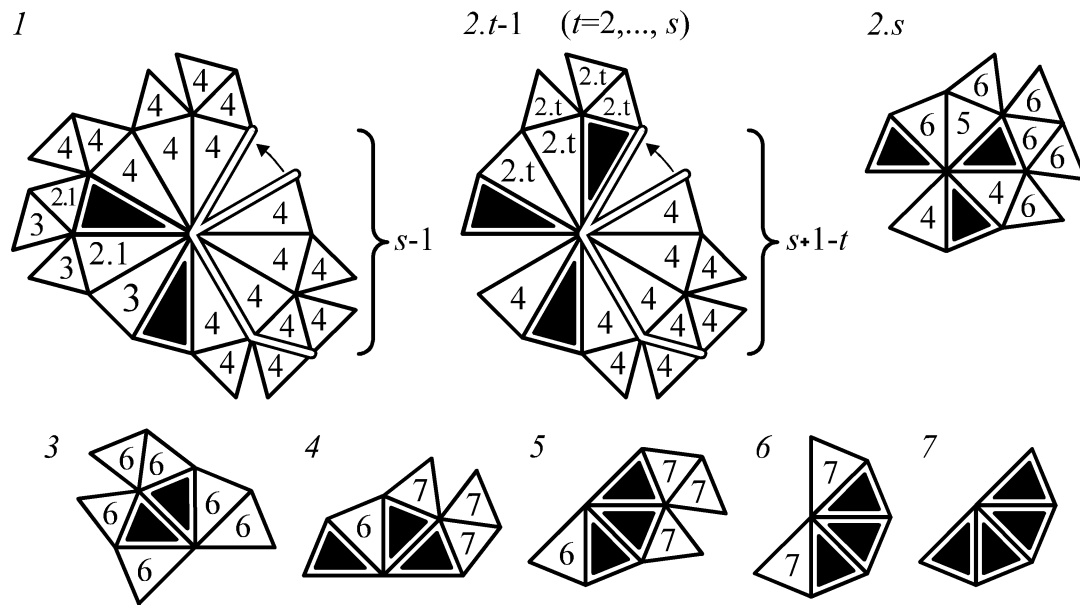
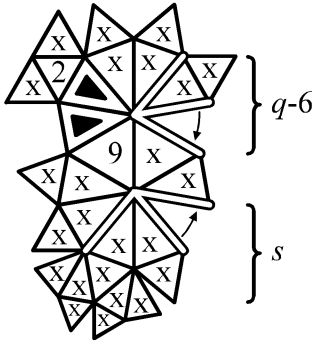
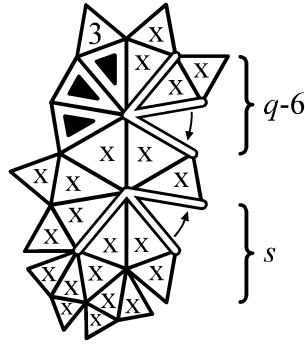
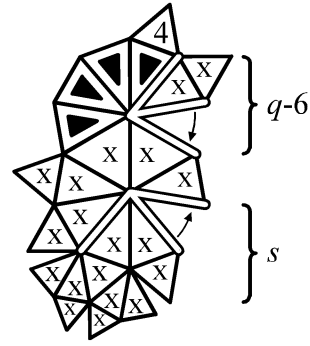
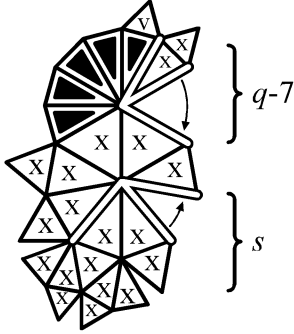
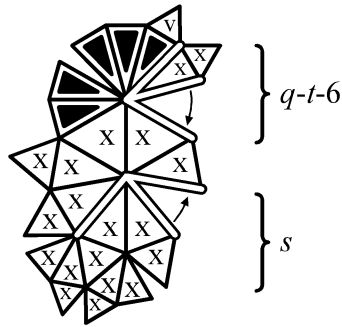


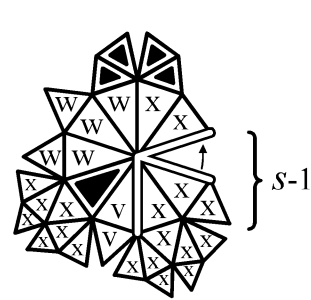
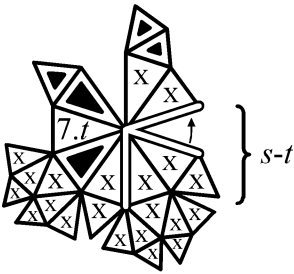
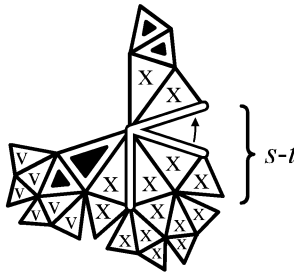
Abbildung 136: Aufbaustrategie für $q = 3s + 5$, $s \geq 1$.

1 ($x=12$)2 ($x=13$)3 ($x=13$)

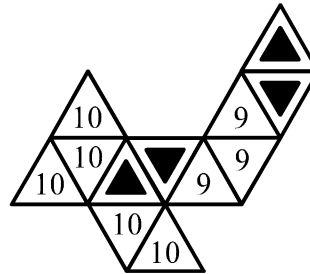
4

($v=5.1$, $x=13$)5.t-1 ($t=2, \dots, q-6$)($v=5.t$, $x=13$)

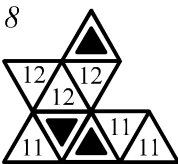
5.q-6

($v=7.s$, $w=7.1$, $x=8$)6.t-1 ($t=2, \dots, s$)($x=13$)7.t ($t=1, \dots, s-1$)($v=6.t$, $x=9$)

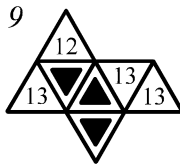
7.s



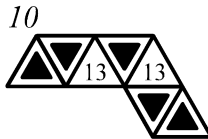
8



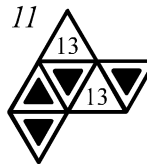
9



10



11



12



13

Abbildung 137: Aufbaustrategie für $q = 2s + 5$, $s \geq 1$.

Die Abbildungen 138 und 139 enthalten Paareinteilungsstrategien für 4 der 7 Verlierer in Abbildung 134. In Abbildung 138 wird der $(3, q)$ -Mosaik-Graph in aufeinander

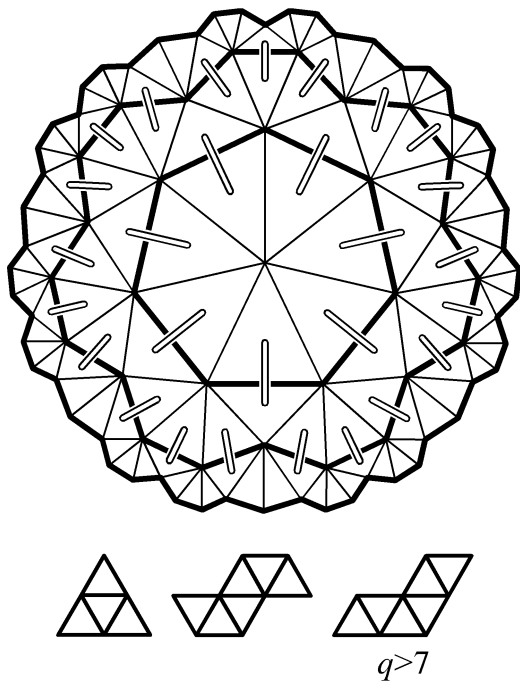


Abbildung 138: Paareinteilung.

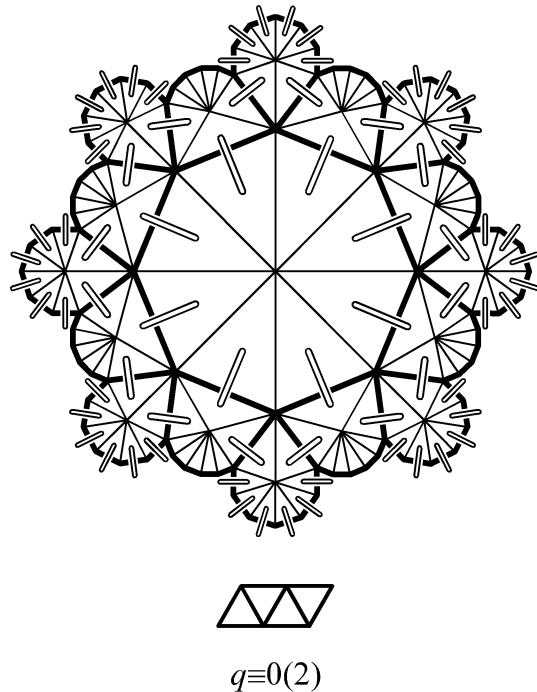


Abbildung 139: Paareinteilung.

folgende Ringe eingeteilt. Ausgehend von einem Knoten besteht der jeweils nächste Ring aus allen Dreiecken, die mit dem Rand des vorhergehenden mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Dann hat jedes Dreieck genau eine Kante mit einem Dreieck aus einem benachbarten Ring gemeinsam. Aus diesen Paaren von Dreiecken ergibt sich die Paareinteilungsstrategie. Überschreitet jede Lage eines Polyomino die Grenze zwischen zwei Ringen, so ist es also ein Verlierer. Das ist für das linke Polyomino offensichtlich. Ließe sich das mittlere Polyomino vollständig innerhalb eines Ringes unterbringen, so würde einer der beiden Knoten vom Grad 5 auf dem äußeren Rand des Ringes liegen. Die Knoten des äußeren Randes eines Ringes haben jedoch höchstens den Grad 4 innerhalb des Ringes. Liegt der Knoten vom Grad 5 des rechten Polyomino auf dem inneren Rand eines Ringes, so können die beiden äußeren Dreiecke des Polyomino nur für $n = 6$ und $n = 7$ innerhalb des gleichen Ringes liegen.

In Abbildung 139 wird der $(3, q)$ -Mosaik-Graph als $(q, q/2)$ -Mosaik-Graph angesehen, bei dem in jedes q -Eck ein weiterer Knoten eingefügt wird, der zu allen Knoten des q -Ecks benachbart ist. Je zwei benachbarte Dreiecke aus verschiedenen q -Ecken bilden die Paare der Strategie. Da sich das abgebildete Polyomino nicht innerhalb eines q -Ecks unterbringen läßt, ist es ein Verlierer.

Für die 3 verbleibenden Verlierer werden die Paare jeweils so angeordnet, daß sich um jeden Knoten eine Situation ergibt, wie sie in den Abbildungen 140 bis 145 dargestellt ist. Legt man den mittleren Knoten des Polyominos auf den mittleren Knoten der Darstellung, so läßt sich leicht erkennen, daß jede Lage des Polyominos mindestens ein Paar vollständig enthält.

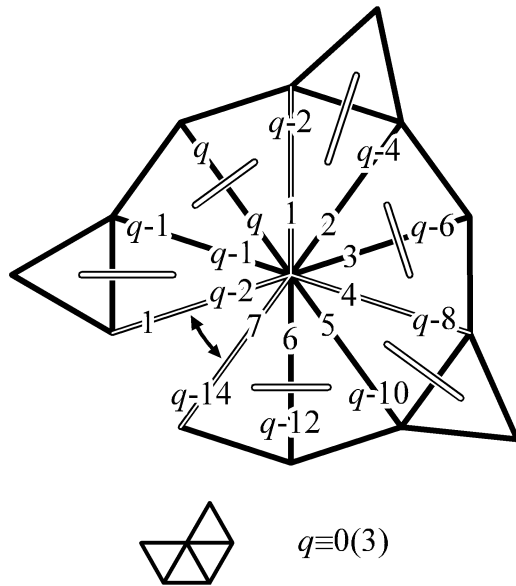


Abbildung 140: Paareinteilung.

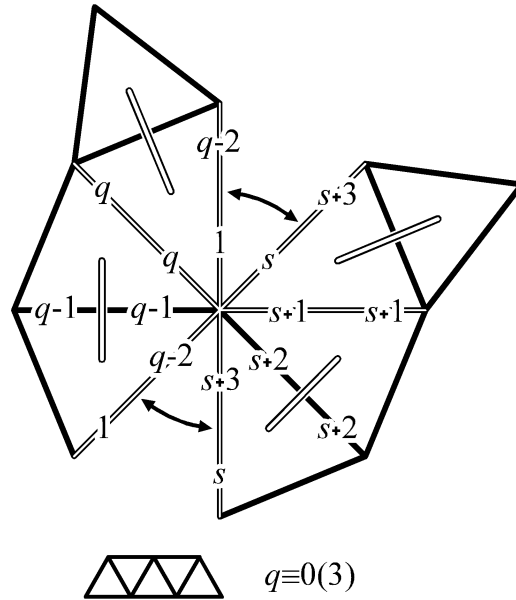


Abbildung 141: Paareinteilung.

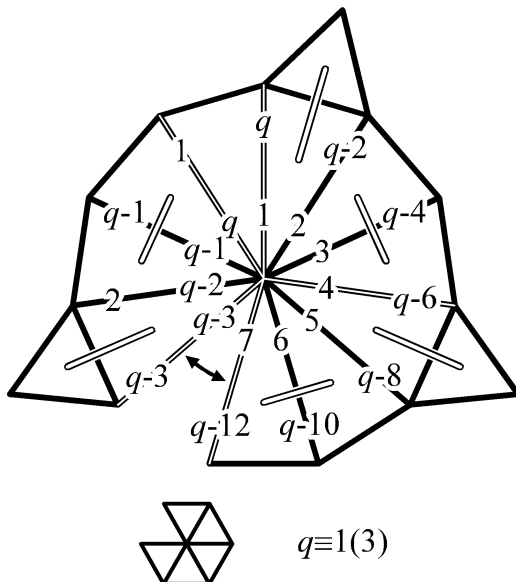


Abbildung 142: Paareinteilung.

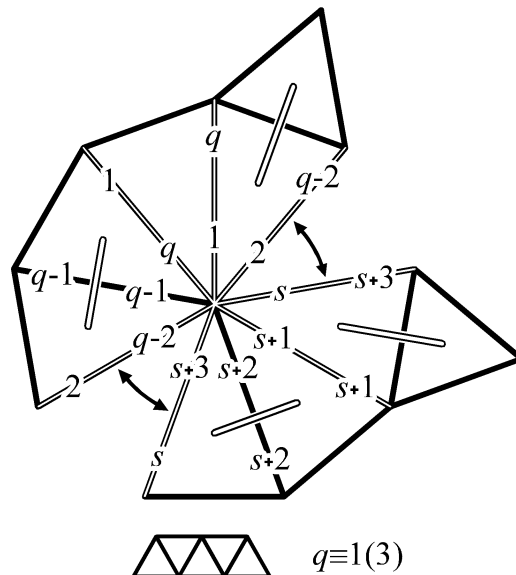


Abbildung 143: Paareinteilung.

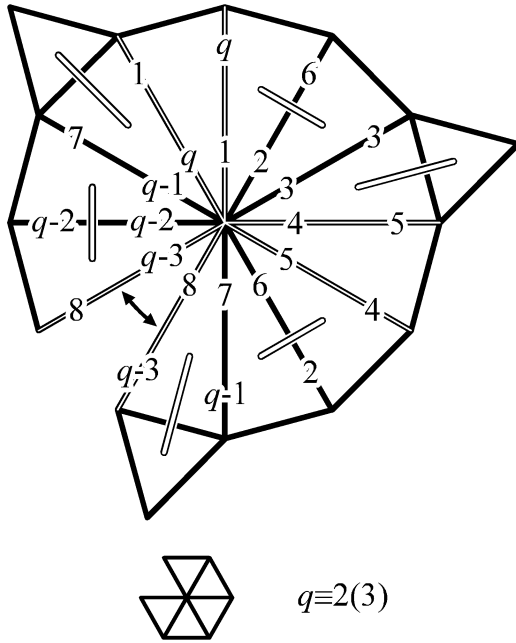


Abbildung 144: Paareinteilung.

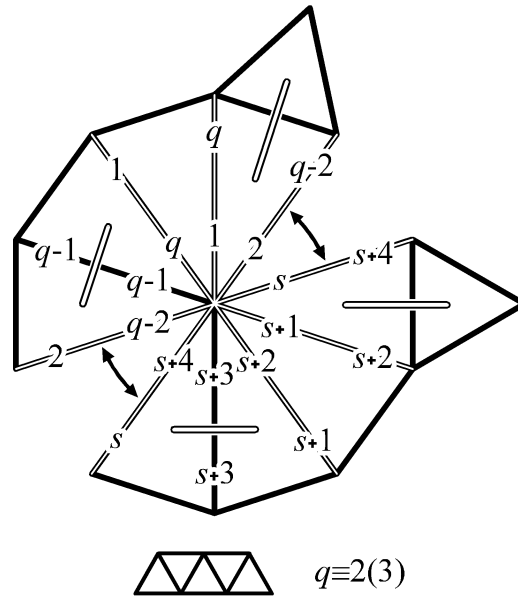


Abbildung 145: Paareinteilung.

Mit Hilfe der folgenden Numerierungen der Kantenenden des $(3, q)$ -Mosaik-Graphen läßt sich zeigen, daß sich die Paare wie gewünscht anordnen lassen. Um jeden Knoten herum werden die Kantenenden im Uhrzeigersinn mit $1, 2, \dots, q$ bezeichnet. Ist das eine Ende mit x bezeichnet, so soll das andere Ende mit $f(x)$ bezeichnet sein. Für die verschiedenen Fälle sind die Funktionen f in den Tabellen 47 bis 50 enthalten.

x	$f(x)$
i	$q - 2i$
$s + 1$	$s + 1$
$s + 2i$	$s + 2i$
$s + 2i + 1$	$s - i + 1$
$q - 1$	$q - 1$
q	q

Tabelle 47: $q = 3s + 3, i = 1, \dots, s$.

x	$f(x)$
i	$q - 2(i - 1)$
$s + 1$	$s + 1$
$s + 2i$	$s + 2i$
$s + 2i + 1$	$s - i + 1$

Tabelle 48: $q = 3s + 1, i = 1, \dots, s$.

Abbildung 146 zeigt diese Numerierung für $q = 7$ und f aus Tabelle 48. Die gewünschte Bezeichnung der Kantenenden ist dann möglich, wenn für die Funktionen f und alle Werte von x die Gleichungen $f(f(x)) = x$ und $f(f(f(x)+1)+1) = x$ (wobei $q+1$ zu 1 wird) erfüllt sind. Dabei stellt die erste Gleichung sicher, daß es keine Widersprüche bei der Bezeichnung einer Kante gibt. Die zweite Gleichung sichert dies für die Dreiecke (siehe Abbildung 147). Der ganze $(3, q)$ -Mosaik-Graph läßt sich dann Ring für Ring widerspruchsfrei bezeichnen.

Man erhält nun die in den Abbildungen 140 bis 145 dargestellten Paareinteilungen,

x	$f(x)$
1	q
2	6
3	3
4	5
5	4
6	2
$6+i$	$q-2i+1$
$s+7$	$s+7$
$s+2i+6$	$s+2i+6$
$s+2i+7$	$s-i+7$
q	1

Tabelle 49: $q = 3s + 8, i = 1, \dots, s$.

x	$f(x)$
i	$q-2(i-1)$
$s+1$	$s+2$
$s+2$	$s+1$
$s+2i+1$	$s+2i+1$
$s+2i+2$	$s-i+1$

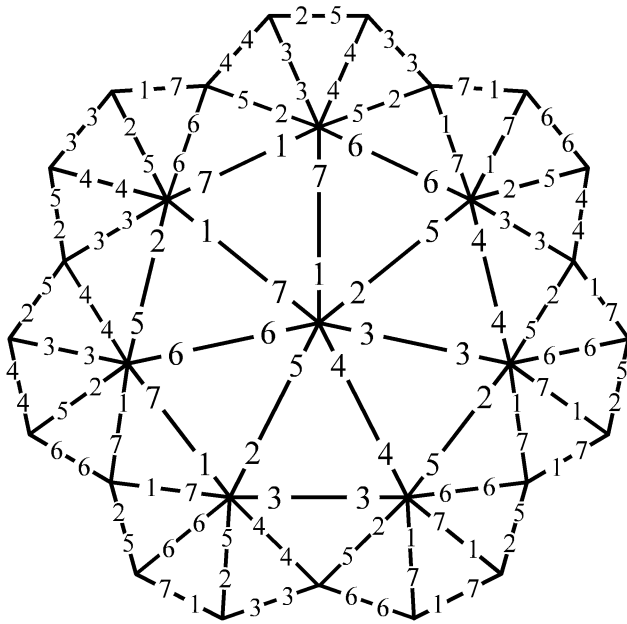
Tabelle 50: $q = 3s + 2, i = 1, \dots, s$.

Abbildung 146: Bezeichnung der Kanten.

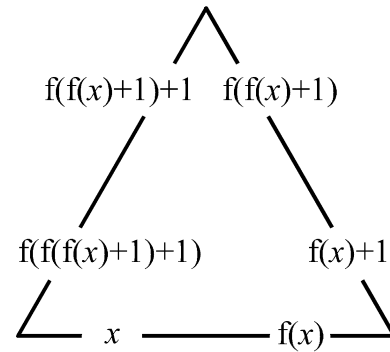


Abbildung 147: Bezeichnung.

wenn man die beiden Dreiecke, die zu einer Kante mit den in Tabelle 51 angegebenen Bezeichnungen benachbart sind, zu einem Paar zusammenfaßt. Bei der Auswahl der Paare treten keine Widersprüche auf, da die in Tabelle 51 angegebenen Bezeichnungen bei höchstens einer Kante eines Dreiecks auftreten, wie sich mit Hilfe der Tabellen 47 bis 50 überprüfen läßt.

Abbildung	Tabelle	Bezeichnungen für Paare	
140	47	$3t$	$t = 1, \dots, s + 1$
141	47	$s + 2t$	$t = 1, \dots, s + 1$
142	48	$3t$	$t = 1, \dots, s$
143	48	$s + 2t$	$t = 1, \dots, s$
144	49	$2, 3t$	$t = 2, \dots, s + 2$
145	50	$s + 2t + 1$	$t = 1, \dots, s$

Tabelle 51: Bezeichnungen der gemeinsamen Kanten der Paare.

9 Zusammenfassung

Dieser Arbeit liegt die Frage nach Gewinnern und Verlierern unter den Polyominos der Mosaik-Graphen zu Grunde. Nach der Begriffserklärung und der Einteilung der Mosaik-Graphen in fünf verschiedene Klassen wird das Problem für jede dieser Klassen einzeln betrachtet. Dabei werden die Beweise konstruktiv geführt, das heißt, es werden Strategien für einen der beiden Spieler angegeben, die sicher zum Erfolg führen. Zusätzlich werden die Anzahlen der Polyominos in den verschiedenen Fällen soweit wie möglich angegeben.

Für die platonischen Körper waren die Ergebnisse bereits vollständig bekannt und sind hier ohne Beweise dargestellt. Bei den euklidischen Parkettierungen der Ebene gilt dies auch für das Dreieck- und das Quadrat-Gitter. In diesen beiden Fällen wurden allerdings weitere Polyominoanzahlen bestimmt. Während beim Dreieck-Gitter für alle Polyominos bekannt ist, ob sie Gewinner oder Verlierer sind, bleibt beim Quadrat-Gitter ein Fall nach wie vor ungelöst. Beim Sechseck-Gitter wurde die Anzahl der ungelösten Fälle von 13911 auf 5265 reduziert.

Für die archimedischen Körper und Parkettierungen werden Polyominos und Aufbauspiele erstmalig betrachtet.

Abgesehen von zwei unendlichen Klassen, den archimedischen Prismen und Antiprismen, gibt es 13 verschiedene archimedische Körper. Neben diesen 13 Körpern werden die jeweils drei kleinsten Prismen und Antiprismen betrachtet. Für 11 dieser 19 Körper wurden alle Gewinner und Verlierer bestimmt, bei einem weiteren Körper bleibt die Frage für nur vier Polyominos unbeantwortet. In allen anderen betrachteten Fällen wurden obere Schranken für die Anzahlen der Gewinner bestimmt. In 16 der betrachteten Fälle wurden die Anzahlen der Polyominos vollständig bestimmt, in den anderen Fällen war dies nur bis zu einer bestimmten Größe der Polyominos möglich.

Für eine der acht archimedischen Parkettierungen konnte die Fragen nach Gewinnern und Verlierern vollständig beantwortet werden. Für zwei weitere Parkettierungen gelang dies bis auf jeweils vier Polyominos. Bei drei Parkettierungen konnte eine obere Schranke für die Anzahl der Gewinner bestimmt werden. Für die beiden verbleibenden Parkettierungen konnten diese Schranken nur für Polyominos bis zu einer bestimmten Größe angegeben werden. Die Anzahlen der Polyominos wurden jeweils soweit wie möglich bestimmt.

Bei den hyperbolischen Mosaik-Graphen wurde nur der Fall der $(3,q)$ -Mosaik-Graphen betrachtet. Für alle Knotengrade q konnten die Gewinner und Verlierer bis auf jeweils wenige Fälle bestimmt werden. Für einige Klassen von q ist die Lösung sogar vollständig. Die Anzahlen der Polyominos wurden bis zur Größe 11 bestimmt.

Literatur

- [1] Jens-P. Bode, Heiko Harborth: Achievement games on platonic solids. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **23** (1998), 23–32.
- [2] Jens-P. Bode, Heiko Harborth: Hexagonal polyomino achievement. *Discrete Math.* **212** (2000), 5–18.
- [3] Jens-P. Bode, Heiko Harborth: Triangular mosaic polyomino achievement. *Congr. Numer.* (2000). (erscheint)
- [4] Martin Erickson, Frank Harary: Generalized Ramsey Theory. XV. Achievement and avoidance games for bipartite graphs. *Lecture Notes in Math.* **1073**, 212–216.
- [5] Martin Gardner: Mathematical Games. *Sci. Amer.* **240** (April 1979), 18–26.
- [6] Martin Gardner: Spiele mit Tieren. *Spektrum der Wissenschaft* (Juni 1979), 8–11.
- [7] S. W. Golomb: Checker boards and polyominoes. *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 675–682.
- [8] Daniel M. Gordon, Frank Harary, Robert W. Robinson: Minimum degree games for graphs. *Discrete Math.* **128** (1994), 151–163.
- [9] Frank Harary: Achievement and avoidance games for graphs. *Ann. Discrete Math.* **13** (1982), 111–120.
- [10] Frank Harary: Achieving the Skinny animal, *Eureka* **42** (1982), 8–14.
- [11] Frank Harary: From dots and boxes to maps and regions, and beyond. *J. Recreational Math.* **16** (1983-84), 22–32.
- [12] Frank Harary: Achievement and avoidance games on finite configurations. *J. Recreational Math.* **16** (1983-84), 182–187.
- [13] Frank Harary: Achievement and avoidance games on finite configurations with one color. *J. Recreational Math.* **17** (1984-85), 253–260.
- [14] Frank Harary, Heiko Harborth: Achievement and avoidance games with triangular animals. *J. Recreational Math.* **18** (1985-86), 110–115.
- [15] Frank Harary: Is Snaky a winner? *Geombinatorics* **2** (1993), 79–82.
- [16] Heiko Harborth: Some mosaic polyominoes. *Ars Combin.* **29A** (1990), 5–12.
- [17] Heiko Harborth, Markus Seemann: Snaky is an edge-to-edge loser. *Geombinatorics* **5** (1996), 132–136.

- [18] Heiko Harborth, Markus Seemann: Snaky is a paving winner. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **19** (1997), 71–78.
- [19] Alexis Papaioannou: A Hamiltonian game. *Ann. Discrete Math.* **13** (1982), 171–178.
- [20] Peter Pearce, Susan Pearce: *Polyhedra Primer*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1978.
- [21] Anthony Pugh: *Polyhedra, a Visual Aproach*. University of California Press, Berkeley, 1976.
- [22] N.J.A. Sloane: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- [23] T.R.S. Walsh: Characterizing the vertex neighbourhoods of semi-regular polyhedra. *Geometriae Dedicata* **1** (1972), 117–123.
- [24] Magnus J. Wenninger: *Polyhedron Models*. Cambridge University Press, New York, 1989.
- [25] Eric W. Weisstein: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press, 1999.